UTILISATION DES PROBLEMES EN MATHEMATIQUES AU LYCEE

«…Avoir comme objet de pensée ses propres pensées est crucial pour l'acquisition de connaissances…»
PLATON

« …L'éducation du raisonnement mathématique n'a pas pour objet principal la capacité de construire des démonstrations opposables aux tiers. Même l'assimilation de méthodes et de techniques n'est qu'un outil au service de la finalité première, qui est d'acquérir l'autonomie dans la résolution de problèmes… »
Pierre LEGRAND, Doyen de l'Inspection Générale de Mathématiques de 1985 à 1993

Nous tenons à remercier Jean AYMES, qui a permis et favorisé l'existence de ce travail
Nadine MILHAUD et Yves MATHERON pour leurs appréciables éclairages théoriques.

Nous remercions, plus particulièrement, Jean-Pierre RICHETON pour son écoute, ses conseils et encouragements répétés et précieux ainsi qu' André TRICOT pour la richesse de son apport théorique ainsi que pour sa grande clairvoyance qui nous aura bien souvent ouvert les yeux !

SOMMAIRE

Introduction

- Présentation 4
- Questionnement 5
- Problématique 6

Nos points de Départ

- Motivations 7
- Notre cadre de travail 9
- Nos pistes de recherche 13
- Clarification de la problématique 15

Expérimentation

- « De l'errance raisonnée » 26
- A partir du questionnaire 34

Conclusion

- Bilan du groupe 45
- Les pistes abandonnées 49
- Perspectives 49

Annexes

- Annexe 1 52
- Annexe 2 56
- Annexe 3 65
- Annexe 4 69
- Annexe 5 72
- Annexe 6 74
- Annexe 7 77
- Annexe 8 80

Bibliographie 92

INTRODUCTION

PRESENTATION :

Notre recherche formation s'est déroulée pendant trois ans de septembre 2002 à juin 2005.

- Six demi-journées en 2002-2003
- Dix demi-journées en 2003-2004
- Dix demi-journées en 2004-2005

La première année nous étions quatre enseignants : Martine DECEMBRE - lycée Bellevue ALBI -, Jean-Michel DENARD- lycée Henri Matisse CUGNAUX -, Alain NEVADO - lycée la Borde Basse CASTRES - et Marie-Christine PALANDJIAN - lycée Raymond Naves TOULOUSE -. Annie PIALOT - lycée Henri Matisse CUGNAUX -nous a rejoints en septembre 2003.
Pendant ces trois ans, chacun de nous avait au moins une classe scientifique en responsabilité ($1^{ère}$ S ou Terminale S). Lors de la deuxième année, nous avions tous une $1^{ère}$ S.

Voici la présentation de notre projet telle qu'elle était formulée dans le Plan Académique de Formation en juin 2001 par Monsieur Jean AYMES, IPR de Mathématiques de l'Académie de Toulouse.

« De seconde en terminale les programmes de mathématiques mettent l'accent sur l'importance de la résolution de problèmes. Un travail des élèves piloté par les formes d'évaluation à l'examen, la durée de l'enseignement, apparaissent comme facteurs tendant à faire obstacle à une mise en œuvre effective de résolutions de problèmes dans la classe. Pour aider les professeurs, le groupe propose :

- *D'expliciter la notion de problème, notamment celle de problème « ouvert » et ses utilisations à des fins pédagogiques, selon des caractéristiques didactiques maîtrisées.*
- *De rechercher les conditions d'une mise en œuvre dans la classe (seconde à terminale) au regard des objectifs des programmes d'enseignement.*
- *D'étudier l'impact d'une organisation de la diversification sur les apprentissages ou les compétences des élèves.*
- *D'élaborer et de proposer des séquences d'enseignement dans ce sens »*

<u>QUESTIONNEMENT</u> :

Notre objectif commun - changer nos pratiques d'enseignement afin de faire évoluer le comportement de nos élèves devant la recherche de problèmes - nous a conduits au questionnement initial suivant :

Comment la recherche de problèmes « ouverts », pour peu qu'elle soit régulière et institutionnalisée, pourrait-elle induire des comportements, voire des automatismes y compris au plan méthodologique, chez nos élèves ?

Ceux-ci pourraient-ils être transposables dans d'autres secteurs de leur activité mathématique comme, par exemple, la recherche d'exercices plus fermés ?

En outre cette recherche ne pourrait-elle pas les amener à plus de discernement, de motivation et, peut-être, de progrès dans le champ technique des nécessaires calculs à mener en mathématiques ?

Dans nos classes, nous proposons tous, nous professeurs de mathématiques, des problèmes variés à nos élèves. Il nous a semblé important de tenter de les classer suivant leur degré d'ouverture.
En voici une possibilité :

<u>Problèmes fermés</u> : ceux dans lesquels l'élève est amené, par des questions nombreuses et plus ou moins liées, à suivre une démarche préétablie. (peu intéressants dans ce cadre........)

<u>Problèmes à petite ouverture</u> : ceux dans lesquels une part d'initiative est laissée à l'élève. Le professeur en connaît les méthodes de résolution et certaines sont accessibles aux élèves.

<u>Problèmes à ouverture moyenne</u> : ceux dans lesquels la part d'initiative des élèves est grande.
Le professeur connaît certaines méthodes de résolution et l'une d'entre elles, au moins, est accessible aux élèves.

<u>Problèmes à grande ouverture</u> : ceux dans lesquels la part d'initiative des élèves est très grande.
Le professeur peut ne pas connaître de méthode de résolution et, par conséquent (!?), aucune d'entre elles n'est directement accessible aux élèves. (peu intéressants eux aussi, dans ce cadre.........)

<u>Problèmes absolument ouverts</u> :ceux dont personne ne connaît la solution.
(peu intéressants, eux aussi, dans ce cadre.......)

Au cours de notre travail, durant ces trois années, nous avons proposé, dans nos classes, des problèmes à petite ou moyenne ouverture, que nous appellerons problèmes « ouverts » ou problèmes à prise d'initiative. Ceci nous a conduit à poser la problématique suivante :

PROBLEMATIQUE :

« Comment faire travailler la classe sur des problèmes « ouverts » afin d'amener les élèves à plus d'implication et de réussite dans leur activité mathématique ? »

NOS POINTS DE DEPARTS

<u>MOTIVATIONS</u> :

Notre motivation est venue de constats personnels dans nos classes.
Le plus souvent on demande aux élèves de résoudre des problèmes avec des questions détaillées, des méthodes clairement annoncées, que ce soit à la maison, en classe ou lors de l'épreuve de mathématiques du Baccalauréat. On peut toutefois se demander si l'aspect systématique de ce type de travail, certes indispensable, n'a pas une part de responsabilité dans un certain appauvrissement des capacités des élèves. Voici quelques-uns de nos constats lors de la première année de recherche :

Constat d'Alain :

En Seconde :

Je donne à chercher des « productions hebdomadaires » c'est-à-dire des petits exercices, en général d'énoncés brefs parfois légèrement ouverts, mais le plus souvent d'application directe du cours. Il arrive très fréquemment, malgré le bon niveau moyen de la classe, que parmi le travail relevé je puisse trouver des questions non traitées et /ou des réponses « clonées ». Il me semble que ceci est caractéristique d'une double absence :
Dans les mentalités des élèves, y compris des « bons », une absence d'automatismes en ce qui concerne le travail de recherche en interaction avec le professeur : essais, production commentée,…
Un manque d'envie de chercher … En fait je crains que beaucoup d'élèves qui entrent en seconde n'aient pas trop de goût ni d'habitude pour la réflexion sur des problèmes dès que ceux-ci leur résistent…

En Terminale **:**

La classe est plutôt faible au plan du calcul ! Ainsi beaucoup d'élèves commettent nombre d'erreurs techniques qui parfois entraînent des incohérences, y compris dans la recherche de devoirs à la maison où le temps ne devrait pas être un problème. Ces incohérences ne semblent pas émouvoir une grande partie d'entre eux !!… D'autre part, lors d'un telle recherche, qui n'est pas « de type BAC », la classe a été plus que déroutée par la (réelle !) difficulté, ne prenant aucune initiative pour élaborer une stratégie qui aurait permis de répondre à telle ou telle question et n'en voyant pas l'intérêt…
Ce constat général n'a rien de neuf mais il me semble plaider pour l'idée de proposer aux élèves un travail plus fréquent de recherche de problèmes ayant un intérêt mathématique particulier afin de leur (re)donner du goût et des compétences.

Constat de Jean-Michel :

Il me semble qu'une majorité des élèves envisagent la pratique des mathématiques comme la mise en œuvre de techniques dans des situations répétitives. La capacité à acquérir ces techniques définira leur niveau en mathématiques, du « je suis bon » au « je suis nul ».
Cette attitude les enferme dans des schémas prédéterminés face à l'apprentissage, qui leur permettent difficilement de donner du sens aux savoirs pour les réinvestir, d'influer sur la cohérence de leurs techniques, de développer des modes de raisonnement autonomes.

Constat de Marie- Christine :

Dans l'ensemble, pour un exercice donné, il n'y a que l'alternative suivante :
« j'ai su faire » ou « je n'ai pas su faire »
Dans le second cas, la trace de la recherche est souvent très pauvre, et se réduit parfois à une simple figure en géométrie, par exemple, pas même codée !
Beaucoup ont du mal à chercher ; à trouver des pistes dans leur cours, dans le texte ; à développer un questionnement ; à laisser des traces de leur recherche.
Ils manquent de sens critique et peuvent ne pas être choqués par des résultats aberrants.
On peut constater que les difficultés de calcul prennent une ampleur telle qu'elles deviennent bloquantes dans la résolution de problèmes.
Pourtant l'envie existe, ils sont désireux de réussir et c'est sans doute à nous, enseignants, de les guider dans cette voie là.

Constat de Martine :

En réaction à une activité donnée en seconde en février 2002, je suis très déçue par l'énergie qu'il me faut déployer pour que les élèves prennent une feuille et se mettent à chercher !!! Une fois ces conditions remplies, il faut encore « batailler » pour qu'ils prennent le temps de réfléchir. J'ai l'impression d'avoir des élèves plutôt passifs qui ont du mal à se mettre en situation de recherche.
Par contre, ils ont des idées, parfois désordonnées, mais qui peuvent aboutir. Ce ne sont pas exclusivement les « bons » élèves qui ont de telles idées. Par ailleurs, s'astreindre à clarifier leur raisonnement apparaît souvent comme long et pénible à la majeure partie des élèves.

En réaction au travail des Terminales (toujours en 2001-2002), je trouve difficile de faire acquérir à nos élèves l'état d'esprit qui devrait être le leur face à des situations où la recherche approfondie s'avère obligatoire. Plus encore, il n'est pas aisé de parvenir à leur faire comprendre qu'il serait bon de le faire ! Comprendre une démarche leur suffit ; ils ont très souvent du mal à se mettre « en situation » et ont tendance à abandonner rapidement…

Face à de tels constats, il nous a semblé que la recherche de problèmes « ouverts » était une réponse possible pour mobiliser d'une autre façon des qualités essentielles à la démarche scientifique : initiative, curiosité, créativité, autonomie, capacité à adopter des démarches de recherche adéquates….

NOTRE CADRE DE TRAVAIL :

L'idée qui consiste à approcher l'enseignement des mathématiques par la mise en place de problèmes n'est pas nouvelle.

- De nombreuses expériences ont été menées et le sont encore actuellement, par exemple sous forme d'ateliers : les ateliers scientifiques, les ateliers « maths en jean » où les élèves sont mis en relation avec un chercheur.
- Les programmes actuels insistent sur la mise en place de résolution de problèmes ainsi, dans le document d'accompagnement de 2^{nde}, applicable à la rentrée 2000, on peut lire page 6 : *« Chercher, trouver des résultats partiels, se poser des questions, expliquer oralement une démarche, rédiger au brouillon puis au propre, accéder au plaisir de la découverte et à l'expérience de la compréhension, renvoient à l'étude de situations et à la résolution de problèmes ».*

  Les programmes de $1^{ère}$S et T^{le}S présentent en préambule la formation scientifique en quatre composantes essentielles : *« Observer, Abstraire, Expérimenter, Démontrer ».*

Tandis que, au moins dans le discours, l'enseignement par « résolution de problèmes » ou par « activités » semblait avoir été entendu, l'examen final du lycée, c'est à dire le Baccalauréat, n'évoluait pas. Citons ici quelques réflexions, travaux et expérimentations qui concernent l'enseignement des mathématiques, pour l'ensemble des lycéens, et qui ont soutenu notre projet de recherche.

- Dans les années 95, un groupe de l'APMEP, animé par Régis GRAS, a proposé d'approcher l'enseignement des mathématiques au lycée par des problématiques.

  Ce travail, explicité dans le supplément APMEP n° 401 , en prolongeait un autre du même type, fait au collège, avec la même classification pour les dix problématiques retenues.

  Partant du constat que l'image publique des mathématiques n'est pas très favorable, que les aspirations des élèves, leurs capacités et leurs compétences sont diverses et hétérogènes, l'idée d'une approche des contenus par les problèmes a pris forme.

L'objectif était d'aborder les notions par des problèmes pris dans des contextes variés, motivants pour les élèves, générant du sens et donc favorisant l'appropriation des nouveaux concepts. La notion de sens y est fondamentale : Page 6 du supplément APMEP on peut lire :

« …S'il parvient à lui donner un sens qui la problématise, répétons-le, la connaissance de l'élève s'accroîtra plus par les réponses aux questions qu'il fera siennes que par celles qui lui restent artificiellement étrangères… ».

A partir de ce constat ce groupe a identifié des classes de situations-problèmes :

« …les classes de problèmes que les contenus mathématiques acquis ou à construire permettent de résoudre, et les classes de situations qui posent question aux élèves, situations d'origine mathématique ou non… ».

Ces deux classes de problèmes mettent effectivement en jeu les dix problématiques retenues, que l'on trouve page 9 du document.

- En 1996, le groupe précédent s'est trouvé renforcé par le groupe « prospective Bac », dont l'objectif était de proposer un renouvellement du contenu et des modalités de l'examen, dans le sens d'une plus grande ouverture des sujets qui feraient appel, dans certains exercices, à la prise d'initiative et aux comportements de recherche.

  Une commission baccalauréat a alors été mise en place, présidée par Paul ATTALI, Inspecteur Général de mathématiques. Les objectifs de cette commission étaient :

  « …d'améliorer l'articulation entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur, la commission estime qu'il serait judicieux d'utiliser avec profit le fait que l'épreuve du BAC pilote fortement les pratiques de l'enseignement secondaire, pour faire évoluer cette épreuve dans un sens qui nécessite plus de réflexion, une réelle appropriation des savoirs et davantage d'autonomie de la part des candidats… » (extrait du rapport).

  La commission proposait de tester lors de l'épreuve :

  « …les connaissances du candidat, son aptitude à mobiliser les notions et les méthodes utiles dans le cadre de la résolution d'exercices ou de problèmes, ses qualités d'initiative et de créativité, sa capacité à raisonner, son aptitude à rédiger une démonstration… ».

  Des expériences et enquêtes ont été faites. Les professeurs consultés pensent qu'actuellement les élèves ne sont pas préparés à des exercices avec prise d'initiative. Ces enseignants sont toutefois favorables à une telle évolution, à condition de pouvoir y préparer leurs élèves suffisamment à l'avance.

A la suite des expérimentations menées en mai 1999, la commission avait dégagé trois axes de travail sur lesquels elle se déclarait prête à ouvrir de nouveaux chantiers ou à préparer de nouvelles expérimentations :

1. Travail sur la confection et l'évaluation de productions d'élèves sur des questionnaires à choix multiple ;
2. Travail sur la conception de « questions de cours », c'est-à-dire d'exercices demandant une mise en forme de savoirs académiques ;
3. Travail sur la conception et l'évaluation d'exercices demandant une certaine prise d'initiative.

La réflexion engagée par cette commission n'a pas été immédiatement finalisée. On sait maintenant que ces travaux ont abouti à une nouvelle maquette du baccalauréat qui n'a été définie qu'au bulletin officiel n° 19 du 8 mai 2003. Depuis la session 2004 cette maquette est appliquée. Notre recherche-formation s'en est donc trouvée confortée au cours de sa deuxième année.

- En corrélation avec les travaux précédents, on peut citer :
  - ✓ Les narrations de recherche : « Une nouvelle pratique pédagogique »
    (Mireille Sauter, groupe I.R.EM de Montpellier, REPERES IREM n° 30 janvier 98).

  - ✓ L'expérimentation de l'option sciences, initiée par Jean-Pierre RICHETON, membre et ex-Président de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) Celle-ci a été menée sur trois années scolaires, de 1997 à 2000, au lycée Jean Monnet de Strasbourg par Jean-Pierre Richeton qui la poursuit depuis lors au Lycée Mas-de-Tesse de Montpellier. Cette option est facultative, elle est ouverte à tous les élèves de seconde du Lycée. Elle inclut les trois disciplines scientifiques et a comme but *« …d'aider les élèves à se déterminer face aux sciences, de favoriser une meilleure insertion en classes de premières (ES, S, STI, STL, ..) tout en développant une ouverture plus large au monde scientifique… ».*

    Le contenu de cette option n'est pas un prolongement du cours, mais est destiné, à aider à la recherche de problèmes avec prise d'initiative, à rendre les élèves plus autonomes, à leur apprendre à chercher, « à sécher », à faire appel à leur imagination, à développer leur créativité. Partant du constat que les élèves aiment chercher ; inventer, à condition qu'on leur accorde du temps - qui a tendance à manquer au quotidien - ; que beaucoup d'exercices proposés sont très guidés ; que les élèves ne sont pas habitués à laisser des traces de leur recherche et se résignent alors à la copie blanche ; l'idée de mettre les élèves en situation de recherche s'impose presque naturellement. Les critères retenus par ceux qui ont mené l'expérience pour définir la notion de problèmes avec prise d'initiative sont les suivants :

« …L'énoncé est court, clair, facile à comprendre, motivant…, la réponse n'est pas évidente…, le problème est riche, plusieurs démarches sont possibles… »

Une description détaillée de cette expérience se trouve dans le n° 429 du bulletin vert de l'APMEP. Professeurs et élèves ont vécu cette expérience comme bénéfique et contribuant à donner une autre image des mathématiques. Il est aussi à noter que les élèves qui ont suivi cette option ont vite compris la nécessité d'un bagage mathématique bien rempli et que la pratique de ce type d'exercices a contribué à motiver l'apprentissage des notions mathématiques et à en apporter une meilleure compréhension.

Convaincus que notre recherche s'inscrivait, au sens large, dans ce cadre, nous avons rencontré Jean-Pierre RICHETON. Il était important pour nous d'avoir son avis. Voici quelques-uns des conseils qu'il nous a donnés :

- Faire preuve de beaucoup de patience car il se peut que pendant deux ou trois heures les élèves ne produisent absolument rien,
- définir un scénario (pourquoi cet exercice, lien avec le programme, quel intérêt didactique ?…),
- faire un compte-rendu de séance,
- demander aux élèves d' utiliser un cahier de recherche afin de garder une trace manuscrite des pistes envisagées et de la démarche employée,
- garder des copies d'élèves.

Il nous a conseillé d'utiliser les modules de première S pour proposer des problèmes à prise d'initiative. Il nous a aussi suggéré de donner de tels problèmes à chercher à la maison, pendant trois semaines, avec des « allers-retours » professeur-élèves, ces problèmes pouvant être facultatifs mais leur recherche effective devant toujours être valorisée. Il nous a indiqué qu'il lui paraissait essentiel d'organiser la classe en groupes, lors d'une telle recherche. Il lui semble important aussi que le premier problème proposé aux élèves soit cherché **avec l'enseignant** car il est bon d'engager et d'accompagner leur réflexion sur la question « comment chercher ? ». D'autre part, il insiste sur le fait de ne pas donner des problèmes trop difficiles. Il nous conseille aussi de prendre en compte l'évolution du degré d'ouverture des problèmes proposés tout au long de l'année. Il nous incite à veiller à ce que l'évaluation soit positive - nous trouverons d'ailleurs une grille de correction dans le rapport ATTALI que Jean-Pierre RICHETON nous procure - Il nous conseille d'introduire des problèmes à prise d'initiative dans les devoirs surveillés après le premier trimestre. Enfin, il nous procure de nombreux documents (voir bibliographie), il est, en particulier, un des auteurs de l'une de nos principales sources de sujets : Les tomes 1 et 2 de *« Pour un enseignement problématisé des mathématiques au Lycée » (brochures n° 150 et n° 154 APMEP)*

PISTES DE RECHERCHE :

Notre premier travail a consisté à dégager de nombreuses questions :

- Quel contenu pour les problèmes ouverts ?
  (lié au programme sûrement, car le temps manque, mais aussi en dehors des programmes comme les exercices des olympiades, par exemple).

- Quels types d'énoncés proposer ? Avec quels scénarios ?
  (questions en liaison avec la brochure *« Plusieurs énoncés pour un même problème »* issue d'un travail, mené par un autre groupe, en recherche-formation)

- Dans quelles classes travailler parmi 2nde, 1èreS et T^{le}S, classes où chacun de nous enseignait ?

- Sur quels thèmes, à chaque niveau ?
  (faut-il un thème commun à tous les niveaux ?)

- Faut-il faire une classification des thèmes ?

- Problèmes à prise d'initiative, sous quelles formes ?
  (travail en classe, en groupes ou non, à la maison ?

- Quels impacts sur les élèves ?
  (augmentation de la motivation - d'où un travail de meilleure qualité fourni par les élèves dans les autres champs de leur activité mathématique - amélioration des techniques de calculs - grâce à un recentrage sur le sens – travail sur le « schéma mental » qui devra être développé par l'élève ?)

- Quels impacts sur nous, professeurs, sur nos pratiques ?

- Quelle évaluation envisager ?

Trois questions émergent et résument l'ensemble de ces préoccupations :

1. Quelle faisabilité du côté de l'enseignant ?
2. Quel rapport aux programmes ?
3. Quelles conséquences pour l'apprentissage spécifique des élèves en la matière ?

Pour tenter de répondre à ces interrogations, nous avons échafaudé le plan de travail suivant :

A)

1. Définir un protocole de mise en place des problèmes à prise d'initiative qui prenne en compte le choix du « bon » problème au « bon » moment de la progression ; en devoir à la maison, avec ou sans allers-retours ; en classe, par groupes ou pas ; un problème qui dure trois heures ou trois mois…
2. Faire des observations qualitatives du comportement des élèves dans la classe, en phase de recherche. Consciemment, nous choisissons de considérer seulement le « ressenti » du professeur concernant les éventuels progrès de ses élèves tout au long d'une période donnée.
3. Faire des observations quantitatives :
   - mesurer les éventuels progrès techniques,
   - tester les compétences des élèves en début d'année scolaire, puis au cours de l'année, dans les devoirs surveillés. La question cruciale « comment mesurer ? » reste néanmoins en suspens…
   - questionner les élèves.

B) Lire les programmes sous l'angle des problèmes à prise d'initiative et parvenir à définir un protocole de recherche de ces problèmes, dans le cadre du travail avec nos classes, c'est-à-dire .

1. élaborer une liste de tels problèmes, en cohérence avec les programmes des niveaux que nous choisirons,
2. établir un « contrat pédagogique » clair, avec les élèves des classes concernées, qui définisse les attentes du professeur et les compétences travaillées,
3. choisir le « bon » problème au « bon » moment dans le cadre d'une progression,
4. envisager sa recherche en devoirs à la maison, avec ou sans indications de la part du professeur, et envisager sa recherche en classe, par groupes ou pas.

Au cours des trois ans qu'aura duré ce travail, notre problématique a évolué. L'exploration initialement prévue des pistes de recherche évoquées plus haut s'est réduite. Le format et l'état d'esprit de l'épreuve de mathématiques du Baccalauréat S - et ES, dans une mesure moindre - ont été modifiés : la notion de « question à prise d'initiative » est apparue, avec l'éventualité de l'existence, à terme, d'un exercice complet de ce type dans un sujet de mathématiques du Baccalauréat S.

<u>CLARIFICATION DE LA PROBLEMATIQUE</u> :

Nous sollicitons alors André TRICOT, maître de conférence à l'I.U.F.M. de TOULOUSE, spécialiste de la psychologie cognitive, notre « personne ressource », afin d'obtenir, de sa part, une aide qui nous permettrait de faire avancer notre réflexion et de mieux délimiter les contours de notre travail. Celui-ci nous adresse à Monsieur Yves MATHERON, maître de conférences en didactique des mathématiques à l'I.U.F.M. de Toulouse, que nous rencontrons le 14 janvier 2004.

Rencontre avec Yves MATHERON

Les différents points du protocole précédent constituent le cadre dans lequel s'inscrit notre problématique. Pourtant nous sommes encore très hésitants, à ce stade, car les directions de travail que nous envisageons de suivre sont multiples, assez hétéroclites et, peut-être, trop nombreuses…

Yves MATHERON se présente et nous décrit son cursus personnel. Il détaille en particulier ce qui l'a amené à s'intéresser aux sciences de l'éducation, en général, et à la didactique des mathématiques en particulier. Voici, résumé en quelques phrases, l'essentiel de ses propos :

En général on apprend des savoirs loin des raisons, des problèmes, qui leur ont donné naissance. Connaître ces raisons leur donnerait du sens. En faisant travailler les élèves sur les problèmes ouverts, ***on provoque une rupture*** *dans le contrat didactique et il faut un assez long moment avant que la classe y adhère. Le but avoué de tels problèmes est de mettre les élèves en activité mathématique.*
Pourquoi est- ce plus intéressant ? Pour le développement personnel des élèves ; mais ce développement personnel se fait aussi au travers du groupe. Les élèves doivent travailler dans le cadre de la classe.
Or tout changement entraîne une déstabilisation. Quand on apprend on gagne des connaissances le plus souvent en mettant en question les connaissances précédemment acquises ; ceci provoque un changement donc une déstabilisation. De plus, on doit veiller à ce que quelqu'un soit reconnu par ses pairs. C'est pourquoi il faut que la collectivité progresse ensemble.

On progresse en changeant de « milieu » et en en créant de nouveaux*.*

Le milieu est l'ensemble des connaissances et procédures grâce auxquelles chacun cherche, et éventuellement trouve, des solutions aux problèmes mathématiques auxquels il est confronté. BROUSSEAU a écrit sur l'intérêt et la richesse des situations-problèmes en dégageant, entre autres, un concept important :
la dévolution, c'est à dire le transfert de responsabilité de production de connaissances à l'élève.

A l'issue de notre entrevue, Monsieur MATHERON propose que nous orientions notre travail en direction d'un rapprochement avec Monsieur TISSERON, à Lyon, autour de la thématique des problèmes ouverts. En perspective, pour l'année à venir, il suggère un travail sur l'analyse, appuyé par le groupe AHA – Approche Heuristique de l'Analyse - (Belgique).

Cette entrevue amène notre groupe aux réflexions et prises de position suivantes :

Pour Monsieur MATHERON, les problèmes ouverts permettent de donner un sens véritable aux notions qu'il s'agit de faire découvrir aux élèves dans le cadre des programmes de nos classes. Il conçoit l'introduction des nouveaux concepts sous forme de résolution de problèmes. Ce que l'on peut attendre ensuite des élèves relève de l'utilisation de ces nouvelles notions. Aussi, de son point de vue, l'Institution, lors des examens qu'elle organise, se doit de contrôler, en fin de « parcours », l'acquisition de compétences minimales induites par ces nouveaux concepts. Il ne lui semble pas judicieux de vouloir évaluer les élèves sur des compétences qui ne seraient pas de cette nature comme, par exemple, celles nécessaires à la résolution de problèmes ouverts ou à prise d'initiative.

Certains membres de notre groupe ne partagent pas totalement ce point de vue et estiment qu'il y a place, dans l'apprentissage des élèves tout au long d'un cursus, pour l'acquisition de certains savoir-faire, par exemple de type méta-cognitifs, que l'on peut retrouver dans le cadre de la recherche de problèmes à prise d'initiative. Ils estiment donc que l'Institution peut, et même doit, inciter à un changement de pratique pédagogique à ce sujet, en particulier en envisageant de tester de telles compétences chez les élèves lors des examens, dont le Baccalauréat.

Par conséquent, cette entrevue, bien qu'elle n'ait pas vraiment permis de préciser notre problématique, nous aura été d'une grande utilité : elle nous aura permis de clarifier ce que nous ne souhaitons pas faire.

Nous ne travaillons pas sur les « situations-problèmes », au sens de BROUSSEAU, mais bien sur les problèmes à prise d'initiative vus non comme permettant l'émergence de nouveaux concepts mais comme l'un des cadres à l'intérieur desquels les élèves ont à mettre en œuvre des savoirs et savoir-faire qui peuvent ne pas être immédiatement disponibles ou mobilisables. Ainsi, leur travail dans un tel cadre doit permettre aux élèves de réactiver des compétences acquises, en termes de contenus mathématiques, mais aussi d'en acquérir de nouvelles relevant plus de la méthodologie - reconnaissance de classes de problèmes, mise en correspondance avec certains « outils » pertinents pour leur résolution -

Notre groupe est maintenant convaincu que chercher et progresser dans la recherche de problèmes à prise d'initiative demande de prendre en compte **une composante méta-cognitive** et, bien que nous ne distinguions pas encore clairement le positionnement de notre travail dans le champ théorique, nous sommes persuadés qu'il est indispensable de solliciter à nouveau André TRICOT afin de recentrer notre problématique.

Il nous apparaît que les apprentissages qui sont en jeu, dans le cadre dont nous nous occupons, ne relèvent qu'en partie de la didactique des mathématiques, c'est la raison pour laquelle nous pensons que l'apport d'André TRICOT, en tant qu'expert en psychologie cognitive, nous sera précieux. Nous avons besoin de comprendre ce qui se passe quand on cherche à résoudre de tels problèmes et nous avons besoin de comprendre en quoi cela est difficile avant d'envisager quelque remédiation que ce soit en direction des élèves !

Apports d'André Tricot

La spécialité d'André Tricot est la psychologie cognitive - « comment les élèves apprennent » - et non la didactique des maths - « comment les professeurs enseignent » -
A partir de la posture théorique propre à sa spécialité et en réponse à nos questions, il propose de partir d'un postulat :
« Il est intéressant de faire chercher des problèmes à prise d'initiative à nos élèves donc on les introduit dans notre pratique » puis d'orienter notre réflexion dans les deux directions suivantes :
« Etant donné un tel problème, comment aider les élèves à progresser dans sa résolution ? Comment évalue-t-on l'élève ?», pour lui *« aider à apprendre, est un problème de dosage, de guidage »,*
« aider les élèves, c'est se demander quelle est la quantité de l'espace-problème qui doit être réduite de sorte qu'ils puissent continuer à cheminer malgré la présence d'un obstacle », en effet, *« trop facilitée, l'atteinte du but détériore l'apprentissage »*

Nous évoquons les difficultés que nous rencontrons lorsque nous demandons à nos élèves de « se regarder travailler », en particulier quand ceux-ci sont bloqués sur un problème. André Tricot nous précise qu'à partir de 13 ans un enfant est capable de se regarder « fonctionner » mais que la plupart du temps, s'il ne le fait pas, c'est qu'il trouve cela inutile ! On trouve utile quelque chose dont le coût temporel est rentable. L'apprentissage met en jeu des compétences de trois ordres :

- ✓ Procédurale : lorsqu'il s'agit d'un **savoir-faire**, de la mise en application d'une règle, d'une procédure - je sais utiliser le théorème de Pythagore -
- ✓ Déclarative : lorsqu'il s'agit d'un **savoir**, d'une connaissance **notionnelle**, d'un **concept**, d'une **définition** - je connais la définition du théorème de Pythagore -
- ✓ Méta-cognitive : lorsqu'il s'agit d'une connaissance sur ses propres connaissances, de la façon dont on planifie son activité mentale, de sa régulation, de son auto-évaluation, d'un **regard sur soi**, « quand on se regarde pédaler » - je sais que pour telle catégorie de problèmes j'ai besoin du théorème de Pythagore ; je sais aussi que j'ai tendance à faire des erreurs quand je l'utilise, alors je fais attention -

Dans le cadre de notre travail, nous devons partir d'une hypothèse qu'il faudra tester.
Les échanges avec André Tricot nous conduisent à formuler celle-ci :

Résoudre un problème à prise d'initiative fait appel à des compétences procédurales et méta-cognitives.

Pour évaluer la validité de notre hypothèse, il faut s'adresser à la même classe. Nous envisageons de le faire en modules avec deux protocoles distincts, un pour chaque groupe de module. Cependant, il nous semble nécessaire d'obtenir davantage d'informations générales sur les mécanismes de l'apprentissage et nous en faisons la demande à André Tricot. Voici ce qu'il nous précise lors d'une deuxième entrevue :

1. Qu'est-ce qu'un problème ?
   D'après Greeno (1978) il existe trois principaux types de problèmes :
   « …des problèmes d'induction de structure… », c'est-à-dire correspondant à une mise en relation d'éléments qui constituent un problème.
   « …des problèmes de transformation… », c'est à dire ceux qui, une situation initiale étant donnée et une situation-but devant être produite, mettent en jeu un ensemble d'opérateurs qui permettent de transformer les-dites situations.
   « …des problèmes d'arrangement… », dans lesquels, un ensemble d'éléments arrangés d'une certaine façon, étant initialement disponible, il faut trouver un ou plusieurs arrangements qui satisfassent à des critères donnés.
   (Extrait : *Traité de psychologie cognitive – Tome 2*)

   D'autre part, il existe des problèmes qui sont « bien définis » et, par opposition, d'autres qui sont « mal définis ». Les premiers ont une solution alors que les seconds en ont plusieurs.
   Pour résoudre un problème, on peut passer par diverses étapes : une caractérisation du-dit problème, des essais, des « feedback » et l'identification de la ou des solution(s).

	Problèmes bien définis	Problèmes mal définis
Avec une solution		
Avec plusieurs solutions		✸

La psychologie cognitive s'intéresse beaucoup à ce type de problèmes à partir des années 80, par exemple les problèmes de conception en architecture.

2. Comment fait-on quand on a un problème à résoudre ?

Il n'y a pas de consensus sur les procédures, mais il y a accord sur l'existence de **catégories de problèmes** et sur la représentation du but à atteindre. Le débat dans la communauté des psychologues est le suivant :

- ou bien on a une idée à partir de laquelle on s'engage puis on fait un « feedback » - défini dans le traité cité précédemment comme : terme désignant l'ensemble des informations rétroactives engendrées par les diverses conséquences de l'activité),
- ou bien on avance et le but se profile...

Il semble maintenant acquis que, dans le cadre de la résolution de problèmes, on ait recours aux deux procédures. Le sujet peut ne pas reconnaître la solution, même l'ayant trouvée : l'identification de la solution n'est pas une activité mentale qui va de soi. Ce que l'on a essayé de faire modifie le raisonnement et parfois le but. La plupart du temps, sorti de l'école, un problème se résout par une recherche d'informations, on raisonne très peu et l'on analyse encore moins son raisonnement…

3. Que peut-on acquérir comme connaissances ?

La situation de résolution de problème est la situation idéale d'apprentissage. Toutefois, les connaissances ne sont transférables qu'exceptionnellement. Celles-ci sont de type :

- Déclaratif : c'est-à-dire décrivant des objets, et leurs relations : des savoirs « verbalisables »,
- Procédural : c'est-à-dire relatif aux règles, aux savoir-faire et dont le but peut être de devenir des automatismes.

Un automatisme est un déclenchement irrépressible, une exécution incontrôlée. Les savoirs permettent de reconnaître la nature d'un problème.

Une **heuristique** de recherche de solutions est *« une règle générale d'action, applicable à toute situation qui permet la plupart du temps d'aboutir plus rapidement à la solution »*.

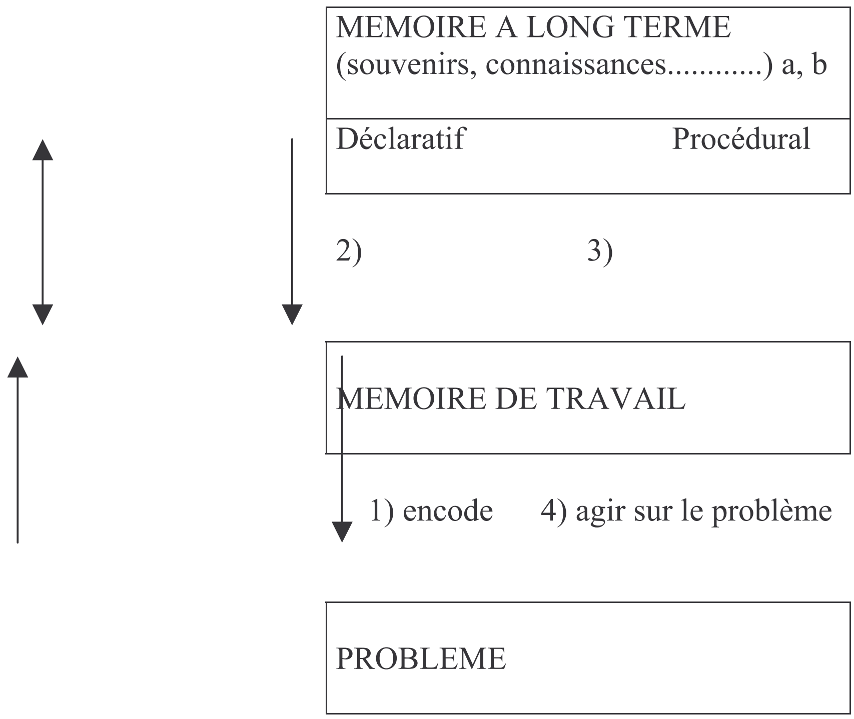
Une heuristique n'est pas un algorithme. L'algorithme est une règle qui permet d'arriver à la solution *dans tous les cas*. Par exemple, les méthodes enseignées pour effectuer les quatre opérations sont des algorithmes. La conséquence en est qu'une heuristique, bien que bonne en général, peut se trouver impropre pour un problème particulier et, éventuellement, rendre le problème insoluble…. Il faut les utiliser mais ne pas hésiter à les abandonner si, dans le cas d'un problème donné, elles ne permettent pas de progresser….

Etre compétent en résolution de problèmes, c'est pouvoir **disposer de beaucoup d'heuristiques** mais aussi de **savoir y renoncer rapidement,** le cas échéant.»

(d'après : *Traité de psychologie cognitive – Tome 3*)

Ainsi, quand un problème est proposé, l'énoncé en est lu avant que de « démarrer ».

Une heuristique est, quant à elle, transférable. On pourra tenter de l'appliquer sur des problèmes appartenant à une même catégorie.



Apprendre c'est, par exemple, utiliser a et b pour construire une nouvelle connaissance α.

(1) je comprends, voire je sais expliquer, puis j'apprends à faire,

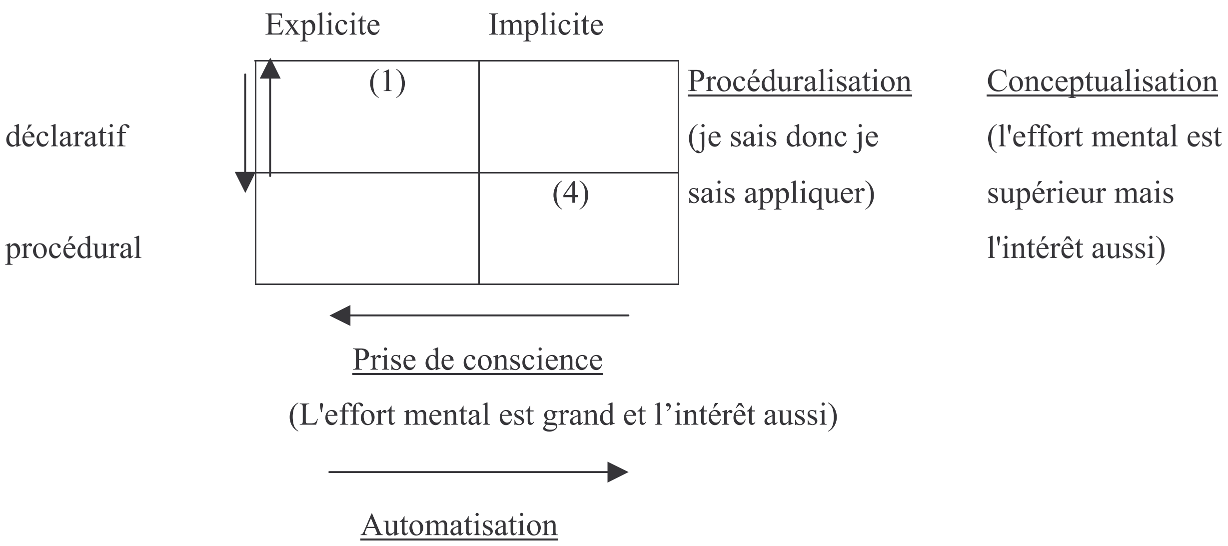
(2) je sais faire puis j'apprends à comprendre,

(3) je n'ai pas conscience de savoir ou de savoir-faire ceci, puis je prends conscience que je le sais (comme M. Jourdain dans *Le Bourgeois Gentilhomme* de Molière)

Dans le système cognitif on repère deux registres différents :

- l'explicite (je sais que je le connais)
- l'implicite (je ne sais pas que je le connais),

en effet, il est possible d'apprendre sans s'en rendre compte !



Dans beaucoup d'apprentissages les quatre démarches interviennent ; les processus ne sont pas opposés mais complémentaires.

Enseigner c'est "tourner", dans ce tableau, dans un sens ou dans l'autre. Mais attention, si l'effort est supérieur à l'intérêt cela ne fonctionne pas !

Retour à notre travail

Les problèmes « ouverts » constituent une méta-catégorie. Ce ne sont pas des "objets" mathématiques tels que les problèmes de géométrie ou les problèmes faisant appel aux calculs de limites…. Or le champ théorique didactique en mathématiques se caractérise par cette spécificité, toute française, qui s'appuie sur le principe fondateur suivant :
"on se doit d'étudier les différents processus de manière contextualisée, c'est-à-dire sans sortir du champ disciplinaire des mathématiques"

Pourtant, nos élèves ont du mal à résoudre des problèmes à prise d'initiative dont la difficulté est singulière et nous semble relever à la fois du champ de la didactique et de celui de la méta-cognition.
De fait, ce type de travail leur résiste particulièrement parce qu'ils ne sont pas encore parvenus à se forger une méthode, un cadre général dans lequel conduire leurs recherches.

Nous aimerions amener nos élèves à créer une catégorie spécifique, c'est-à-dire à reconnaître comme tel un "problème à prise d'initiative" et, alors, à mettre en oeuvre une (des ?) heuristique(s) de résolution. Nous aimerions aussi qu'ils soient capables de transférer des connaissances en vue de résoudre de tels problèmes.

Nous sommes praticiens bien plus que didacticiens et notre travail nous semble devoir procéder d'une méthodologie, certes scientifique, mais aussi pragmatique.
Pour notre expérimentation : nous devons formuler des hypothèses claires, et définir point par point à quels observables cela correspond.

Mise en place d'une heuristique de résolution de problème à prise d'initiative

Les expérimentations successives que nous avons menées et dont nous rendons compte plus loin, confirment qu'il est essentiel de proposer ce type de travail à nos élèves. Cependant, le taux de réussite demeure, dans l'ensemble, insuffisant et laisse à penser que les savoir-faire spécifiques à de tels problèmes ne peuvent « aller de soi ». Nous devrons nous imposer de mettre en place un protocole concret de recherche permettant aux élèves de progresser et d'être évalués positivement, conformément à ce que nous avons pu apprendre des interventions d'André TRICOT sur les mécanismes d'apprentissage.

En premier lieu, nous nous sommes attachés à identifier nos propres « heuristiques de recherche ». Certains d'entre nous commencent par analyser l'énoncé, les mots clés, puis listent alors les connaissances éventuellement mises en jeu. Le raisonnement est alors presque fait. D'autres font une analyse plus globale de l'énoncé. Face à une situation de blocage, les attitudes divergent. Certains d'entre nous « se laissent du temps », d'autres font des recherches documentaires, d'autres encore sollicitent un « intervenant extérieur ». Des éléments de nature subjective peuvent aussi rentrer en ligne de compte et influer sur l'efficacité de la recherche :

- ✓ ce problème me plait-il ?,
- ✓ ai-je envie de me mettre à le chercher ?
- ✓ suis-je satisfait face à la forme de la solution que je propose ?

Cependant ces éléments restent difficiles à intégrer dans une heuristique générique de résolution.

A l'issue de ce moment « d'introspection », nous avons tenté de dégager trois grands temps dans la résolution de problèmes. Ils nécessitent des allers-retours permanents.

GENERER DES PISTES

-Appropriation des mots de l'énoncé
-Représentations, essais, tests…
-Recherche d'analogie avec nos expériences passées
-Reconnaissance de cadres

Mémoire de travail (cf compte-rendu précédent)

AVANCER LES PISTES

-Types de raisonnement
-Procéduralisation
-Décomposition en sous problèmes
-Simplifier le problème
-Analyser la particularisation ou l'abandon de contraintes.

VALIDATION

- Cohérence

- Objectif atteint ou partiellement atteint

-Rédaction rigoureuse

Eléments théoriques de didactique mathématique

A la lecture d'Yves CHEVALLARD – Professeur des Universités à l'I.U.F.M. de Marseille - , nous avons pris conscience que notre projet de recherche pouvait s'articuler autour de deux axes. Yves CHEVALLARD met en évidence deux types de questionnements à propos de l'activité mathématique : le premier concerne la nature des objets mathématiques, le second la fonction de ces derniers.

Il établit une dichotomie fondamentale en distinguant les objets ostensifs, et les objets non ostensifs.

Il parle

- d'objet « ostensif » pour tout objet matériel : les mots de la langue, les graphismes, les gestes…
- d'objet « non ostensif » pour toute idée ou tout concept qui ne peut être qu'évoqué ou invoqué par la manipulation adéquate de certains objets « ostensifs » associés.

Ainsi, dans notre recherche-formation, nous proposons le problème à prise d'initiative comme un outil, un « ostensif », qui va permettre à l'élève de développer sa capacité conceptuelle.

« Le double questionnement que nous venons d'expliciter – le problème de la « nature » des objets mathématiques et celui de leur « fonction » dans l'activité mathématique – nous a conduit à établir une dichotomie fondamentale en distinguant deux types d'objets : les objets ostensifs, d'une part, les objets non ostensifs, d'autre part. Nous parlerons d'objet ostensif - du latin ostendere, « montrer, présenter avec insistance » - pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. Ainsi en est-il d'un objet matériel quelconque et, notamment, de ces objets matériels particuliers que sont les sons (parmi lesquels les mots de la langue), les graphismes (parmi lesquels les graphèmes permettant l'écriture des langues naturelles ou constitutifs des langues formelles), et les gestes. Les objets non ostensifs sont alors tous ces « objets » qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence – sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours). Ainsi les objets « fonction » et « primitive d'une fonction » sont-ils des objets non ostensifs que nous avons appris à identifier et à activer par le moyen de certaines expressions, écritures et graphismes particuliers mis en jeu dans des pratiques et situations tout autant particulières. »

(d'après *Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique*
Marianna BOSCH et Yves CHEVALLARD)

A la suite d'Yves CHEVALLARD, nous partons du principe que « toute activité suppose une co-activation d'ostensifs et de non ostensifs et que l'acquisition individuelle d'une technique pour résoudre un type de problème suppose, dans un premier temps, une prolifération ostensive importante : la technique se construit sur une base d'objets empruntés à des univers divers de l'activité humaine et en recourant à de nombreux points d'appuis ostensifs ».

Afin d'aider les élèves à se construire des ostensifs personnels « efficaces », nous leur proposerons une grille d'aide à la recherche d'un exercice. Nous souhaitons qu'elle entraîne l'élève à s'auto-questionner sur la tâche à accomplir, et sur les techniques à mettre en œuvre pour la réaliser, mais aussi que l'attitude mise en place à travers cette grille se généralise à toute autre activité mathématique. Elle pourra être performante si l'élève la sollicite fréquemment.

Nous nous référons aux travaux d'Yves CHEVALLARD qui montre que :
« le simple remplacement d'un ostensif par un autre peut bouleverser l'évolution de l'activité… »

Nous espérons, grâce aux problèmes à prise d'initiative et à la grille, aider nos élèves à progresser.

« On peut montrer, plus généralement, que la « microgenèse » individuelle d'une technique pour résoudre un type de problèmes donné suppose, dans un premier temps, une prolifération ostensive importante : la technique se construit sur une base d'objets empruntés à des univers divers de l'activité humaine et en recourant à de nombreux points d'appui ostensifs – discursifs, gestuels, graphiques, écrits. Mais l'évolution de l'activité – qui aboutira, le cas échéant, à une technique stabilisée – conduit ensuite à une réduction ostensive de plus en plus évidente, la mise en œuvre de la technique tendant à mettre au rebut tout l'échafaudage ostensif qui en avait permis la construction. Il en va de même lorsque le processus de création observé affecte toute une praxéologie mathématique, par exemple celle qu'essaie de recréer un professeur dans sa classe ou un auteur de manuel, avec la collaboration supposée des élèves ou des lecteurs. »
(d'après *Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique*
Marianna BOSCH et Yves CHEVALLARD)

En parallèle, au fur et à mesure de notre expérimentation du problème à prise d'initiative et des observations faites sur le déroulement des séances, nous avons pris conscience, comme l'écrit Yves CHEVALLARD, *« de la présence d'éléments déterminants comme condition de possibilité de cette pratique »*

Nous avons donc été vigilants à repérer les différents scénarios possibles, à suivre le même scénario, et à noter avec autant de rigueur que possible son déroulement, en choisissant pour chacun d'eux d'adopter les mêmes gestes professionnels d'une classe à une autre, d'un enseignant à un autre, puis d'expérimenter des scénarios différents avec des groupes d'une même classe, ou les mêmes scénarios avec des gestes professionnels différents. (Voir en particulier le problème ouvert sur les médianes).

« Afin de mieux rendre compte de ce « refoulement institutionnel » (et culturel en particulier), nous décrirons l'ensemble des moyens constitutifs d'une pratique comme comprenant deux parties essentielles. D'une part, toute pratique suppose, de la part de ses acteurs, la mise en œuvre de certains gestes. « Gestes » est ici à prendre au sens courant du terme mais aussi dans un sens plus large : nous dirons que des actions telles que penser à quelque chose, écrire au tableau, prononcer une phrase, sont aussi, génériquement, des gestes. Ce sont les gestes qu'accomplissent les acteurs d'une pratique que l'on voit le mieux culturellement : ils apparaîtront pour cela plus facilement comme des éléments définitoires de l'activité. On aura en revanche une forte tendance à oublier l'autre constituant de la pratique, moins visible mais tout aussi essentiel, qui est ce que j'appelle le dispositif. Le dispositif comprend l'ensemble des objets qui permettent que la pratique se déroule (soit encore l'ensemble de tous les objets nécessaires au déroulement de la pratique, et sans lesquels celle-ci ne pourrait avoir lieu). D'après ce qui précède, une pratique n'est rien d'autre qu'un dispositif à l'intérieur duquel des acteurs réalisent certains gestes.
Nous verrons plus loin que le refoulement institutionnel de certains des moyens de la pratique (en particulier, de la plupart des éléments du dispositif, qui ne sont pas vus généralement comme constitutifs de l'activité) et la mise en valeur de certains gestes entraîne un phénomène d'hypostasiation de certains objets de l'activité. »
(d'après *Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique*
Marianna BOSCH et Yves CHEVALLARD)

Les principes et réflexions, de type méta-cognitif, dont nous nous inspirons nous semblent être en cohérence avec ce cadre didactique. Nous sommes ainsi confortés dans l'idée que nous ne ferons progresser nos élèves qu'en leur permettant de s'approprier un questionnement et des méthodes adaptés à la recherche de problèmes à prise d'initiative. Ceci nous conduira, dans le cours de notre expérimentation, à mettre en place une aide individuelle qui puisse amener les élèves à prendre conscience de leurs propres heuristiques de recherche... Nous déciderons alors d'accompagner les sujets de problèmes d'un questionnaire afin de valider, ou non, le protocole décrit à la fin du paragraphe *Mise en place d'une heuristique de résolution de problèmes à prise d'initiative*.

EXPERIMENTATION

« DE L'ERRANCE RAISONNEE » :

Concrétisant nos réflexions de la première année, nous commençons la deuxième année par un test.

1) **Le test :Test calculs numériques début 1S, non noté - durée : 1 heure**

A) Transformer les expressions proposées en utilisant les règles opératoires élémentaires.

a) Dans chaque ligne entourer la ou les cases qui donnent le résultat correct, les valeurs littérales qui interviennent dans les expressions sont des nombres réels.

		1	2	3	4	5
A1	$\frac{2}{3}a\times 8a =$	$\frac{16}{3}a$	$\frac{10}{3}a^2$	$\frac{26}{3}a$	$\frac{16}{3}a^2$	$\frac{16}{24}a^2$
A2	$(-3a)^2 =$	$-9a$	$3a^2$	$(9a)^2$	$-6a$	$9a^2$
A3	$3-\frac{m+2}{2} =$	$3-m$	$\frac{4-m}{2}$	$\frac{1-m}{2}$	$2-m$	$\frac{8-m}{2}$
A4	$\frac{x^2+x-2}{x^2+2x+1} =$	$\frac{x-2}{2x+1}$	$\frac{x+2}{x+1}$	$\frac{x}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}$	$\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)^2}$	
A5	$((5T)^3)^2$	$25T^2$	$(5T)^6$	$5T^6$	$25T^2$	$10T^3$
A6	$3x+2y=5$	$y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$	$y=-\frac{3}{2}x+5$	$y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$	$y=-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$	$y=\frac{5-3x}{2}$
A7	Soit n un entier naturel, $2^{n+1}+2^n =$	3×2^n	4^{2n+1}	$2\times 2^{n+1}$	2^{2n+1}	
A8	Soit $\vec{u}$ un vecteur, $3(\vec{u}+\frac{2}{3}\vec{u}) =$	$\frac{5}{3}\vec{u}$	$\frac{2}{3}\vec{u}$	$\frac{11}{3}\vec{u}$	$5\vec{u}$	

B) QCM, avec des racine carrées. Entourer votre réponse.

Pour tout réel positif a :

B1	$\sqrt{a} < a$	Oui	Non	Je ne sais pas
B2	$\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2$	Oui	Non	Je ne sais pas
B3	$\sqrt{2a}\times\sqrt{2a} = 4a$	Oui	Non	Je ne sais pas
B4	$\sqrt{a^2+a^2} = 2a$	Oui	Non	Je ne sais pas

C) Résoudre rapidement des équations , des inéquations dans $\mathbb{R}$.

Compléter le tableau ci-dessous en donnant, pour chaque ligne, l'ensemble solution des équations et inéquations proposées.

		Ensemble de solutions
C1	$-7x = 0$	
C2	$x^2 = 1-\pi$	
C3	$0x > -7$	
C4	$0x = -7$	
C5	$-5x < -5$	
C6	$\frac{x-2003}{x-2003} = 1$	
C7	$\frac{x^2+8}{x^2+5} = 1$	

D) Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$. Rédiger sur une copie votre démarche.

(D1) $\frac{x-5}{4} = \frac{16}{x-5}$; **(D2)** $(4x-1)^2-(4x-1)(x+3)-4x+1=0$; **(D3)** $(3x-1)(-2x+1) \le 0$; **(D4)** $\frac{9}{2x} \ge \frac{8x}{(x+1)^2}$.

Bien que la mesure des progrès, dans le champ technique des calculs, n'apparaisse pas nécessairement comme un axe principal de notre travail, elle n'en demeure pas moins un moyen d'évaluer la réussite des élèves dans l'un des champs de leur activité mathématique.
Voici le bilan de ce test :

<u>Des erreurs répétées et significatives</u> :

- ✓ Parties C et D, résolutions d'équations et d'inéquations : les solutions ne sont pas vérifiées, les implications sont fausses
- ✓ Parties A et B, beaucoup d'erreurs dans le calcul numérique et littéral : par exemple : la réduction de 3-(m+2)/2 en (8-m)/2 ou la réduction de $2^n + 2^{n+1}$ en 2^{2n+1} ou 4^{2n+1} ou encore : pour tout a>0, l'inégalité $\sqrt{a} \prec a$ est vraie

Dans un bon nombre de ces problèmes, l'ouverture vers d'autres champs permet aux élèves de se rendre compte qu'ils ont commis certaines erreurs techniques. Ils peuvent, par conséquent, chercher à les identifier, et éventuellement, parvenir à les corriger, en revenant au champ purement calculatoire.
Nous décidons de choisir des problèmes qui demandent de développer des stratégies diverses et dont la résolution nécessite, entre autres, d'infirmer une proposition, de se préoccuper de la cohérence d'un résultat, en particulier au regard de la conjecture faite.

2) Première expérimentation (voir annexe 1)

L'objectif est de confronter les élèves à un questionnement « ouvert » afin de les placer dans une situation de recherche ; de prendre en compte leurs initiatives ; de les habituer à restituer leurs stratégies ; de motiver leurs éventuels abandons…
Le problème posé est le suivant **:**
« Existe-t-il un triangle ABC d'aire maximale sachant que AB=AC=12 cm ?»
Ce problème peut être résolu, par exemple, grâce à un changement de cadre : du géométrique au fonctionnel ou à l'algébrique. Il offre une ouverture en relation avec notre progression, ce qui permet de présager une absence de blocage initial pour la grande majorité des élèves.
Pour ce premier contact avec les problèmes décidés en commun, nous ne définissons pas de scénario de passation. Les modalités de réalisation sont donc diverses : classe, maison, groupes, individuel. Nous décidons toutefois de ne pas faire d'intervention générale pour ne pas perturber les initiatives des élèves.
Nous nous appuyons sur la grille d'évaluation ci-dessous, extraite d'un document de travail utilisé par le groupe EVAPM d'évaluation des programmes de mathématiques au sein de l'APMEP.

Que la recherche soit individuelle, suivie d'une mise en groupe ou non, ou collective, dès le début, les élèves se sont investis dans ce travail sans que nous ayons besoin d'intervenir.
La consigne suivante a été donnée :
« Ecrivez tout ce qui vous semble envisageable pour résoudre le problème. N'hésitez pas à explorer toutes les pistes qui vous viennent à l'esprit. Laissez une trace écrite de vos essais même s'ils n'aboutissent pas ».
Quelques élèves ont rendu le problème résolu au bout de vingt minutes. Malgré le fait que les documents soient autorisés, certains élèves, qui ont eu sous les yeux la formule $S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$, n'ont pourtant pas eu l'idée de l'utiliser...Ceci nous intrigue fortement…
Les méthodes de recherche observées sont conduites, en premier lieu, dans des cadres où l'élève se sent le plus confiant et à l'intérieur desquels il a développé certains automatismes. Ainsi l'introduction d'une fonction est, pour certains, un réflexe en réaction au mot maximum. On observe aussi une bonne utilisation de la trigonométrie ainsi qu'un raisonnement valide, purement géométrique, lié à l'utilisation d'un demi-cercle. Ce problème permet de repérer des erreurs fréquemment commises - code 6 du test de rentrée des évaluation seconde – de détecter des méthodes erronées – « $\sqrt{144 - x^2} = 12 - x$ » -
Il permet le choix de différentes méthodes et, par conséquent, encourage les prises d'initiatives.
A la suite de cette expérience nous nous questionnons sur l'utilisation de la grille d'évaluation et du suivi que pourrait en faire un élève. Lui permettrait-elle de mesurer une progression dans la prise d'initiative ?
Ce questionnaire est assez lourd dans son utilisation. Nous sommes conscients qu'il est nécessaire, pour les élèves, de bien faire figurer, sur leur copie, toutes leurs idées. Ceci reste difficile pour certains d'entre eux, et nous décidons de nous accorder sur un scénario commun, afin d'insister lourdement sur ce point. Nous nous imposons de choisir des problèmes qui permettent d'approfondir le notions-clés du programme de la classe de $1^{\text{ère}}$S et qui peuvent se résoudre à l'aide de stratégies différentes ou de méthodes qu'ils pourront réinvestir ultérieurement, dans le courant de l'année.

	Grille d'évaluation pour tous les problèmes ouverts								
Nom des élèves	**Expérim entation**	**Conjecture**	**Démarche théorique**	**Démarche calculatoire**	**Démonstration correcte**	**Esprit critique**	**Erreurs calcul**	**Rédaction**	**Bilan**

Lexique relatif à la grille d'évaluation des problèmes ouverts :

1. Expérimentation : L'élève a pris de l'initiative, a tâtonné.
2. Conjecture : L'élève a un moment du problème a fait une hypothèse acceptable.
3. Démarche théorique (au sens de raisonnement) : L'élève s'est engagé dans une stratégie pertinente.
4. Démarche calculatoire : L'élève se questionne, réfléchit devant un calcul, est vigilant à l'ensemble dans lequel il travaille,……..
5. Démonstration correcte : enchaînement des propriétés …..et bonne argumentation.
6. Esprit critique : L'élève vérifie la cohérence de ses réponses.
7. Erreurs calcul : Présence d'erreurs de calcul graves de type de celles du test.
8. Rédaction : Vocabulaire utilisé précis, clarté des idées, français correct, ….

Légende relative à la grille d'évaluation des problèmes ouverts :

Code : + + pour très satisfaisant

Code : + pour satisfaisant

Code : – pour insuffisant

Code : – – pour très insuffisant

Code : pour non évalué en raison de la nature du problème par exemple

Code : 0 pour non fait , impossibilité d'évaluer en raison des types de réponses de l'élève.

3) Deuxième expérimentation (voir annexe 2)

Le problème posé est suivant :

Les longueurs a, b et c des trois côtés respectifs [BC], [CA] et [AB] d'un triangle ABC étant données, il est facile d'exprimer son périmètre en fonction de a, b et c.

Pouvez-vous établir une formule permettant de calculer l'aire S du triangle ABC seulement en fonction des longueurs des côtés ?

Bien que le cadre de résolution soit restreint pour un élève de première, ce problème vise à piquer leur curiosité, à leur permettre de développer un travail sur les indéterminées et à leur faire prendre conscience de l'importance d'une rigueur technique. Pour la résolution de ce problème, des scénarios individuels, seront mis en œuvre - voir annexe 2 - Bien entendu, nous continuons d'observer le travail et les attitudes développés par les élèves. Toutefois, nous interrompons la phase d'observation pour distribuer un formulaire d'aide à la recherche ou pour donner des indications. Cette interruption n'est pas spécialement bénéfique et les élèves en difficulté n'ont pas l'idée d'expérimenter des cas particuliers.

Au regard du travail fait par les élèves, nous notons toujours la présence d'erreurs techniques dans les calculs et nous relèvons la prégnance du chapitre récemment traité en cours - utilisation de vecteurs - Malgré le côté particulièrement technique de cet exercice, les élèves se sont investis dans sa recherche. Ce travail permet de développer une certaine intelligence dans les calculs. Ceux-ci doivent être menés en se préoccupant de leur sens. En effet, les valeurs littérales doivent être introduites par les élèves et perdent donc leur caractère abstrait. Ils ont alors à les relier, à exprimer l'une en fonction de l'autre puis à recommencer. C'est une démarche formatrice et utile en mathématiques qui amène les élèves à devenir plus autonomes dans leur travail.

Par ailleurs, nous ne voyons pas comment poursuivre avec la grille d'évaluation. Celle-ci demande beaucoup d'investissement, elle n'est pas adaptée à la nature changeante des différents problèmes.
Nous décidons de l'abandonner.

D'autre part, les difficultés rencontrées par les élèves pour entamer la recherche des problèmes nous questionnent sur la nécessité d'un scénario de passation unique. Notre souci est le suivant :
Comment aider les élèves sans interrompre leur recherche, alors que nous nous devons d'encourager la poursuite de toutes les pistes ? Ne doit-on pas leur montrer comment on aborde une situation de recherche ? Comment s'attacher à faire progresser les élèves dans la recherche de problèmes ouverts, sans trop intervenir ?

4) Troisième expérimentation (voir annexe 3)

Le problème posé est le suivant :
d_1, d_2, d_3 sont trois droites concourantes en un point G. Construire un triangle tel que ces trois droites en soient les médianes.

La troisième expérimentation s'articule autour du lien entre notre questionnement sur la mise en œuvre d'un scénario commun de passation et la teneur de la première rencontre avec André Tricot, qui met en exergue les compétences procédurales et méta-cognitives engagées dans la résolution d'un problème ouvert.

Le problème de construction proposé est accompagné de deux modalités d'aide. La première vise à créer un questionnement pas à pas pour le résoudre, la seconde à initier une démarche d'analyse-synthèse, peu rencontrée par les élèves.

<u>Scénario 1</u> **: Chaque aide est sous forme de questions dirigées.**
Aide n°1 : Quels points caractérisent un triangle ? Peux-tu en placer un ?
Aide n°2 : Que penses-tu du rôle du point G ?
Aide n°3 : Quelle configuration judicieuse introduire pour placer les points manquants ?

<u>Scénario 2</u> : Inciter à la méthode d'analyse-synthèse.

Aide n°1 : Imagine la figure réalisée et aide-toi des propriétés induites par cette figure.

Aide n°2 : Ne t'occupe plus de la construction de tous les sommets du triangle mais cherche, en respectant les consignes, à construire une partie de la figure seulement. (Abandon d'une contrainte).

Aide n°3 : Reproduis le procédé des aides 1) et 2) une nouvelle fois pour terminer la figure et vérifie.

Ce problème met en évidence, d'une part, la difficulté d'imaginer qu'il est nécessaire de justifier toute construction proposée et, d'autre part, la technicité que représente une recherche par analyse-synthèse rarement rencontrée auparavant. L'aide n°2 du scénario 2 consiste à masquer une partie de la figure et à demander aux élèves ce qu'ils observent. Aucun automatisme réflexe ne les pousse à voir le parallélogramme : cela dénote un manque de développement des capacités d'observation et d'associations d'idées. Beaucoup ignorent les propriétés du centre de gravité d'un triangle. Il nous apparaît clair que ces recherches ont des conséquences positives sur le comportement des élèves .

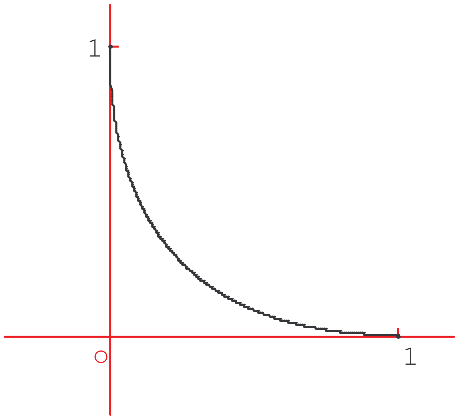
- Par exemple, une élève, qui avait déjà été performante lors de la recherche d'un précédent problème, forte de l'assurance acquise, trouve, sans aide une méthode adéquate amenant à la solution de ce nouvel exercice.
- Un autre élève, qui trouve sans aide au bout d'une heure, prend conscience qu'il n'aurait jamais passé autant de temps à chercher un tel problème à la maison...
- Un troisième réactive des compétences déjà mises en oeuvre lors d'un exercice qu'il avait été le seul à résoudre à la maison.

L'expérimentation est délicate, d'une part, par manque d'habitude de notre part à la variabilité d'un scénario ; d'autre part, par la nature des scénarios - qui consistent en des aides successives, le deuxième étant éloigné des compétences des élèves - Nous remarquons que les élèves ont du mal à poser leurs questions par écrit, cette modalité du scénario n'est pas très opérationnelle.

Ce que nous testons n'apparaît pas assez clairement : doit-on continuer à envisager deux scénarios ? Doit-on les faire travailler en groupe ? Individuellement ? Différemment selon les classes ? Doit-on évaluer intuitivement la progression des élèves ou bien en se donnant des hypothèses et en essayant d'en mesurer la validité ?

5) Quatrième expérimentation (voir annexe 4)

Nous décidons de tester l'exercice 4 de la banque produite en 2004 par l'Inspection Générale en accompagnement des programmes de Terminale des séries S et ES, en supprimant toute question intermédiaire.



Soit f une fonction définie pour tout x de [0 ; 1] par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ **.**

On admettra que (C) est tangente aux deux axes de coordonnées aux points de coordonnées (1 ; 0) et (0 ; 1).

(C) est-elle un arc de cercle ?

L'énoncé de cet exercice privilégie le cadre fonctionnel dont il faut savoir sortir pour passer dans un cadre géométrique dans lequel une démonstration simple est disponible. Ce changement de cadre est difficile pour les élèves. Le problème développe les procédures de validation-réfutation. Nous n'avons pas de scénario commun, mais nous continuons à nous attacher à l'importance des idées initiant la résolution d'un problème et aux causes des interruptions de procédures.

Il est surprenant de constater, une fois encore, combien les connaissances « basiques » ne sont pas mobilisées par nombre d'élèves, la simple définition du cercle, en l'occurrence !

Par contre, l'implication des élèves est plus importante que dans les exercices classiques et certains d'entre eux, pas toujours en situation de réussite, apportent des réponses.

Ce problème met en évidence l'erreur de raisonnement suivante :
« si c'est un cercle alors la droite d'équation y = x est un axe de symétrie ; je démontre que la droite d'équation y = x est axe de symétrie ; la courbe est donc un cercle ». Ayant énoncé une condition nécessaire, la plupart des élèves oublient de s'interroger sur le fait qu'elle soit suffisante.

Dans certaines de nos classes, l'équation du cercle n'ayant pas été vue, les recherches dans cette direction n'ont pas abouti.

Les travaux des élèves rendent compte, de manière générale, de la fragilité de la structure procédurale et conceptuelle de certains d'entre eux :

- nature du raisonnement à mettre en œuvre,
- confusion sur la nature des conditions nécessaire et suffisante,
- définition du cercle, relayée par un calcul de distance non mobilisé,
- lecture orientée de l'énoncé – le mot tangente – qui, ici, mène à une voie sans issue,
- difficulté de penser que cette courbe n'est pas un arc de cercle donc absence de recherche de « points contres-exemples ».

Le taux de réussite sur ces problèmes demeure dans l'ensemble insuffisant. Cependant, au regard des expérimentations successives, il est évident que proposer ce type de travaux à nos élèves est encourageant dans la mesure où ils sont « partants », voire demandeurs, même lorsque ceux-ci sont déconnectés de leurs apprentissages courants. Ils s'engagent dans des stratégies de manière autonome, même s'ils n'en mesurent pas nécessairement l'aboutissement à priori. Ils confrontent leurs stratégies et les défendent.

Cependant l'idée qu'un travail systématique, et donc plus fréquent, sur les problèmes à prise d'initiative, **se suffirait à lui-même**, est à reconsidérer. Ceci nous impose la mise en place d'une aide méthodologique de recherche, conformément au point de vue exprimé en fin du chapitre NOS POINTS DE DEPART, de sorte que les élèves puissent évoluer et être évalués positivement dans une stratégie globale. A cette fin et après avoir confronté nos différentes heuristiques de recherche, nous construisons un questionnaire pour accompagner les prochains problèmes à prise d'initiative.

<u>EXPERIMENTATION A PARTIR DU QUESTIONNAIRE</u> :

Questionnaire version 1

NOM :………………………………………

Questionnaire d'aide à la recherche d'un exercice

<u>Remarque</u> : si vous n'avez pas assez de place, continuez au verso de la feuille.

- Question préliminaire : à priori, est-ce que cet exercice vous plait ?

Questionnement préliminaire à la recherche		**Bilan**
✓ Avez-vous eu des difficultés pour comprendre l'énoncé ? si oui lesquelles ? ✓ Quels sont les mots clés de cet énoncé ? A quoi vous font-ils penser ?	➢ Dans quels cadres (trigonométrie, transformations, repère, vectoriel, géométrie, …) pensez -vous pouvoir résoudre cet exercice ? ➢ Dans le cadre choisi, à quelle partie du cours de mathématiques de cette année (ou des années antérieures) l'énoncé vous renvoie-t-il ? ➢ Quels sont alors les outils dont vous disposez ? (définitions, propriétés, …)	➢ Votre méthode a-t-elle abouti ? ➢ Si oui, pensez-vous que votre raisonnement est juste ? ➢ Avez-vous abandonné ? Après combien de temps ? ➢ Avez-vous pensé que ce n'était pas la bonne méthode ? ➢ Avez-vous essayé d'autres méthodes ? ➢ Si vous avez fait des calculs, les avez-vous vérifiés ?

Ce questionnaire a été soumis à André TRICOT. Son sentiment est que cette première modélisation doit être testée et devra évoluer en fonction des résultats obtenus.
Nous le testons donc avec le problème 5 (voir annexe 5) dont l'énoncé est le suivant :

Soit ABCD un carré de sens direct. On note I, J, K et L les milieux des segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. Le segment [AJ] coupe [DI] en P et [BK] en Q. Le segment [CL] coupe [BK] en R et [DI] en S. Démontrer que PQRS est un carré

Les élèves ont le choix de compléter ou pas le questionnaire proposé.
Voici les constations relevées :

- Le plus souvent les élèves se sont investis dans les réponses, parfois pour faire plaisir à leur professeur…
- Il semble malgré tout que ce questionnaire soit une aide pour des élèves moyens.
- Les questions les moins renseignées sont celles qui concernent le cours, les outils et le raisonnement, ce qui est assez inquiétant et montre la nécessité, pour nous, de retravailler cette partie.
- On compte plus de réponses dans la troisième colonne qui correspond à l'analyse de leur travail.
- La première colonne n'a pas posé problème, exceptée la distinction entre essais et cas particuliers - exemples pour se familiariser avec le problème, cas particuliers pour voir ce qui se passe lorsqu'on le simplifie et que l'on se demande dans quelle mesure on peut transposer les observations faites au cas général -
- La deuxième colonne rend compte de nombreuses confusions de la part des élèves :
  Pour la question relative au cadre de résolution de l'exercice, ceux-ci répètent ce qui est entre parenthèse. En fait, nous jugeons cette question trop difficile et sans réel apport, aussi nous décidons de la supprimer.
- On constate ensuite que la distinction entre « partie du cours évoquée » et « outil dont vous disposez » n'est pas souvent faite. Les réponses sont trop souvent les mêmes à ces deux items.

Ces constatations nous ont conduits à modifier le questionnaire de la manière suivante :

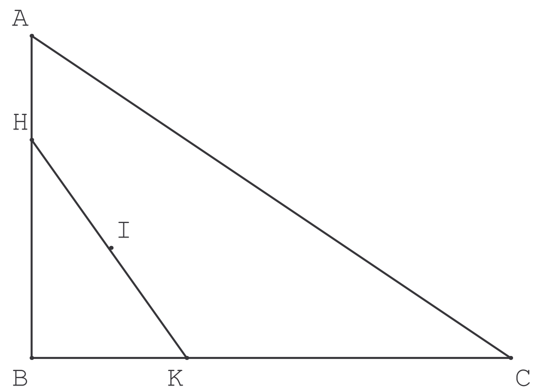
- Pour la première colonne nous reprenons les questions déjà existantes et rajoutons : « cela vous a-t-il aidé ? »
- Nous simplifions la deuxième colonne qui a une importance fondamentale puisqu'elle est le déclencheur de la résolution de l'exercice.
- Enfin, nous essayons de clarifier le questionnement de la troisième colonne, ayant noté des incohérences dans les réponses - calculs non vérifiés par élève qui a pourtant des doutes, par exemple-

Nous obtenons ainsi le questionnaire, version 2, qui sera proposé aux élèves l'année suivante avec le problème 6 (voir annexe 6) dont voici l'énoncé :

On considère un triangle ABC rectangle en B tel que 2BC = 3AB.
Un point H et un point K sont mobiles respectivement sur le segment [AB] et sur le segment [BC] de telle façon que 2BK = 3AH
On note I le milieu (mobile) du segment [HK].

1) **Quel est l'ensemble décrit par le point I quand H décrit le segment [AB] ? justifier.**

Le problème serait-il différent si le triangle ABC n'était pas rectangle ?



Questionnaire version 2

NOM :……………………………………….

Questionnaire d'aide à la recherche d'un exercice

Répondez aux questions suivantes, suivant l'ordre que vous voulez, en laissant de côté les questions qui ne vous semblent pas pertinentes.

<table>
<tr><td colspan="2"><u>Questionnement préliminaire à la recherche</u>
➢ Question préliminaire : A priori, est-ce que cet exercice vous plait ?</td><td><u>Bilan</u></td></tr>
<tr><td>➢ Avez-vous eu des difficultés pour comprendre l'énoncé ?
si oui lesquelles ?

➢ Quels sont les mots clés de cet énoncé ?
A quoi vous font-ils penser ?

➢ Avez-vous fait différents dessins ?

Cela vous a-t-il aidé ?

➢ Avez-vous fait différents essais (proposé des exemples) ?

Cela vous a-t-il aidé ?

➢ Avez-vous étudié des cas particuliers ?

Cela vous a-t-il aidé ?</td><td>➢ A quelle(s) partie (s) du cours de mathématiques de cette année (ou des années antérieures, ou exercices déjà faits), l'énoncé vous renvoie-t-il ?

➢ Quel est alors le premier résultat que vous cherchez à obtenir ?

Avec quelle méthode ?</td><td>➢ Avez-vous abandonné la méthode choisie ?

Si oui pensez-vous cependant que cette méthode était la bonne ?

➢ Avez-vous essayé d'autres méthodes

➢ Si vous avez faits des calculs les avez vous vérifiés ?

➢ Estimez vous que vos résultats soient cohérents ?

➢ Si vous n'avez pas trouvé l'exercice, au bout de combien de temps avez-vous abandonné sa recherche ?</td></tr>
</table>

Nous constatons que :

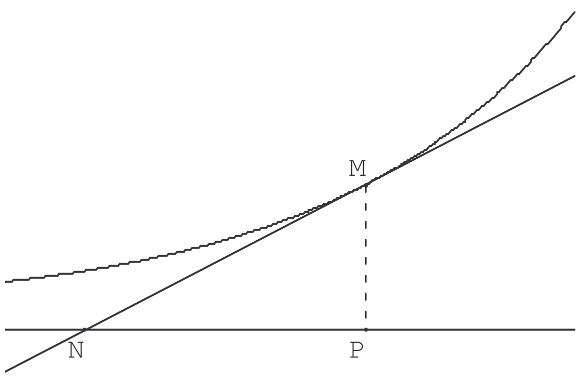
- La colonne 3, portant sur le bilan, est fort peu renseignée dans cette nouvelle version du questionnaire.
- Le questionnement sur la compréhension de l'énoncé semble pertinent puisque celle-ci varie sensiblement d'un exercice à l'autre…
- La colonne 2 est peu remplie - peu de références au cours, seule une petite moitié d'élèves, dans chaque classe, « s'implique »… -

Cependant il s'agit apparemment d'un « outil » qui incite certains élèves à prolonger leur recherche, c'est à dire à ne pas abandonner trop tôt. C'est positif mais insuffisant !
Il faut préciser les questions qui restent encore trop « généralistes » pour ce contexte de recherche où la « reconnaissance » du type de problème n'est pas aisée…

Suite à ce nouveau constat nous construisons, lors de notre première séance, du 13 octobre 2004, un « outil » impliquant, de la part des élèves, un nouveau questionnement possible lors de la recherche d'un problème (voir le questionnaire version 3 page suivante).

Son but est de bien mettre en évidence les nécessaires va et vient (énoncé, cours, théorème, but…) d'où l'idée des « bulles » et des flèches. L'idée est aussi d'essayer de construire un « outil-type » pour la résolution de différents problèmes.

Nous décidons de le proposer aux élèves, pour qu'ils le critiquent, et de le tester avec des bulles vides lors de la résolution du problème à prise d'initiative suivant. Il s'agit du problème de la sous-tangente. (annexe 7) issu de la banque d'exercices proposée par les I.G.



Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur P telle que pour tout x réel, $f'(x) \neq 0$

Pour tout point M d'abscisse x appartenant à $\mathcal{C}$, on considère P le point de coordonnées (x , 0) et N le point d'intersection de la tangente en M à la courbe $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.

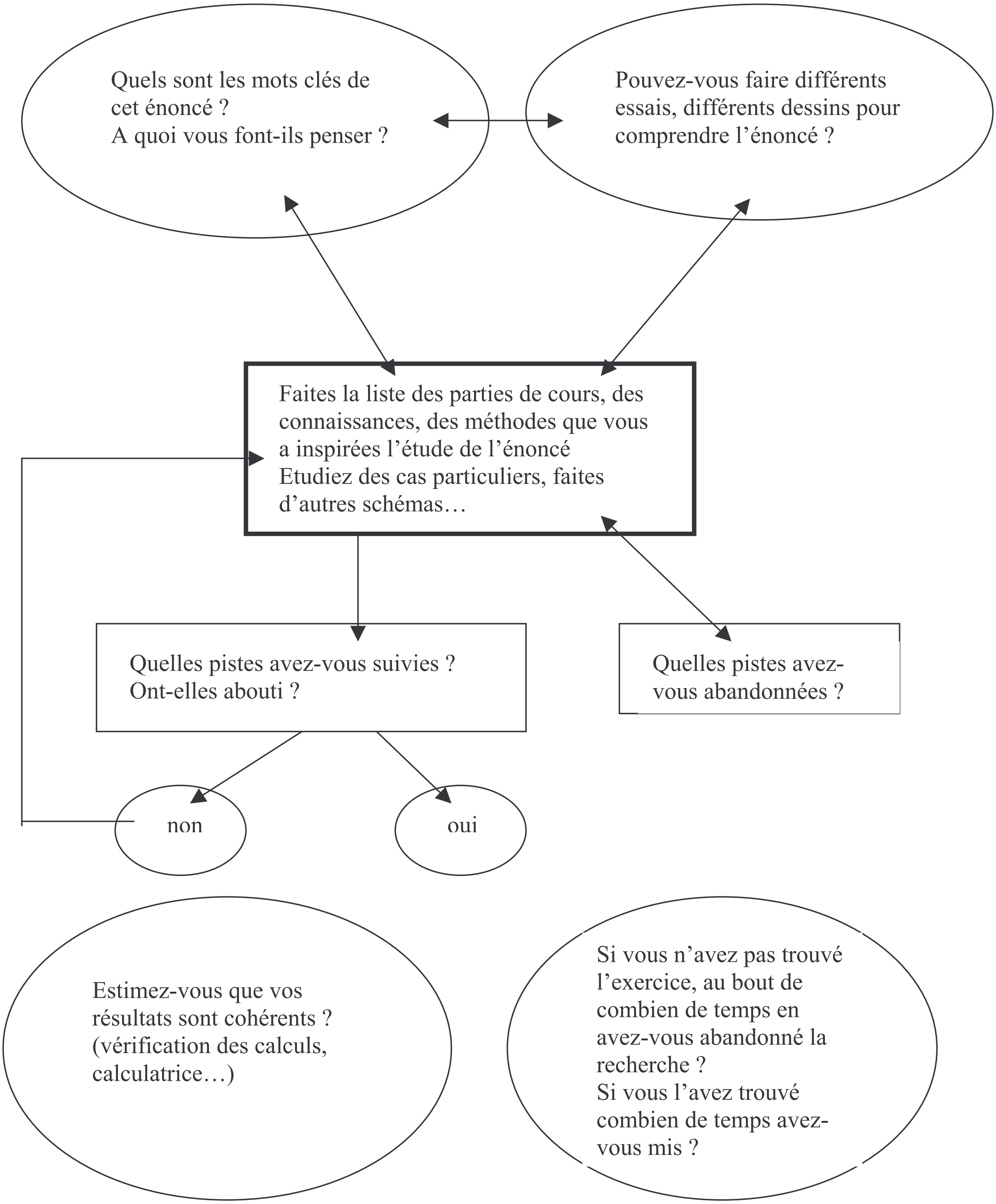
Soit k un réel . Déterminer les fonctions f pour lesquelles pour tout point de la courbe $\mathcal{C}$ le vecteur $\overrightarrow{PN} = k\vec{i}$.

Questionnaire version 3

NOM :……………………………………….

« OUTIL » POUVANT AIDER A LA RECHERCHE D'UN EXERCICE

A priori cet exercice vous plaît-il ?



Voici ce que nous avons pu retirer des réponses fournies par les élèves à cette version du questionnaire :

Dans une première classe de TS :

Pourquoi avoir mis « cet exercice vous plait-il ? ». Nous pensons que lorsqu'un exercice est motivant, l'élève va s'y investir davantage.
Pourquoi mettre en parallèle « pistes suivies – oui ; non - et pistes abandonnées » ? Effectivement, nous le changerons par la suite.
Quelques élèves disent ne jamais avoir ce type de questionnement. Ceci nous conforte dans l'idée qu'il est utile.

Ce questionnaire n'a pas été renseigné par 11 des 34 élèves de la classe. Parmi eux un seul a réussi et n'en avait donc pas l'utilité...Parmi les 20 qui l'ont complété, 9 l'ont fait de façon très sommaire et 4 de façon très complète.

En général, « mots-clés » et « parties du cours » se recoupent - tangentes, vecteurs – ce qui n'est pas complètement anormal au regard de la formulation du questionnaire.
Dans les mots-clés, ils mettent la conclusion, aussi faudrait-il sans doute créer une bulle « objectifs ».
Le questionnaire semble apporter peu d'aide, peut-être est-il plus efficace pour un travail individuel ?
Il est sûrement à perfectionner.

Dans une deuxième classe de TS :

Le questionnaire a été fort peu complété. Nous pensons que ces élèves ont été un peu trop exposés à notre expérimentation. Il semble qu'ils pensent que cette aide est efficace quand ils sont chez eux mais pas en classe. Aussi avons-nous demandé à deux collègues de l'établissement concerné de tester ce questionnaire dans leurs classes, « vierges » de tout rapport à cette expérimentation. Dans ces classes, les élèves se sont volontiers prêtés à ce test. Ils l'ont testé avec le problème n°6
(voir annexe 6)

Ils ont été enthousiastes, même si le problème n'a pas été correctement réussi. Le questionnaire a été rempli et il leur a semblé que celui-ci pouvait les aider dans leur réflexion. Les élèves « en difficulté » ont été les plus « partants ». Ceci n'est pas étonnant au vu de nos observations.

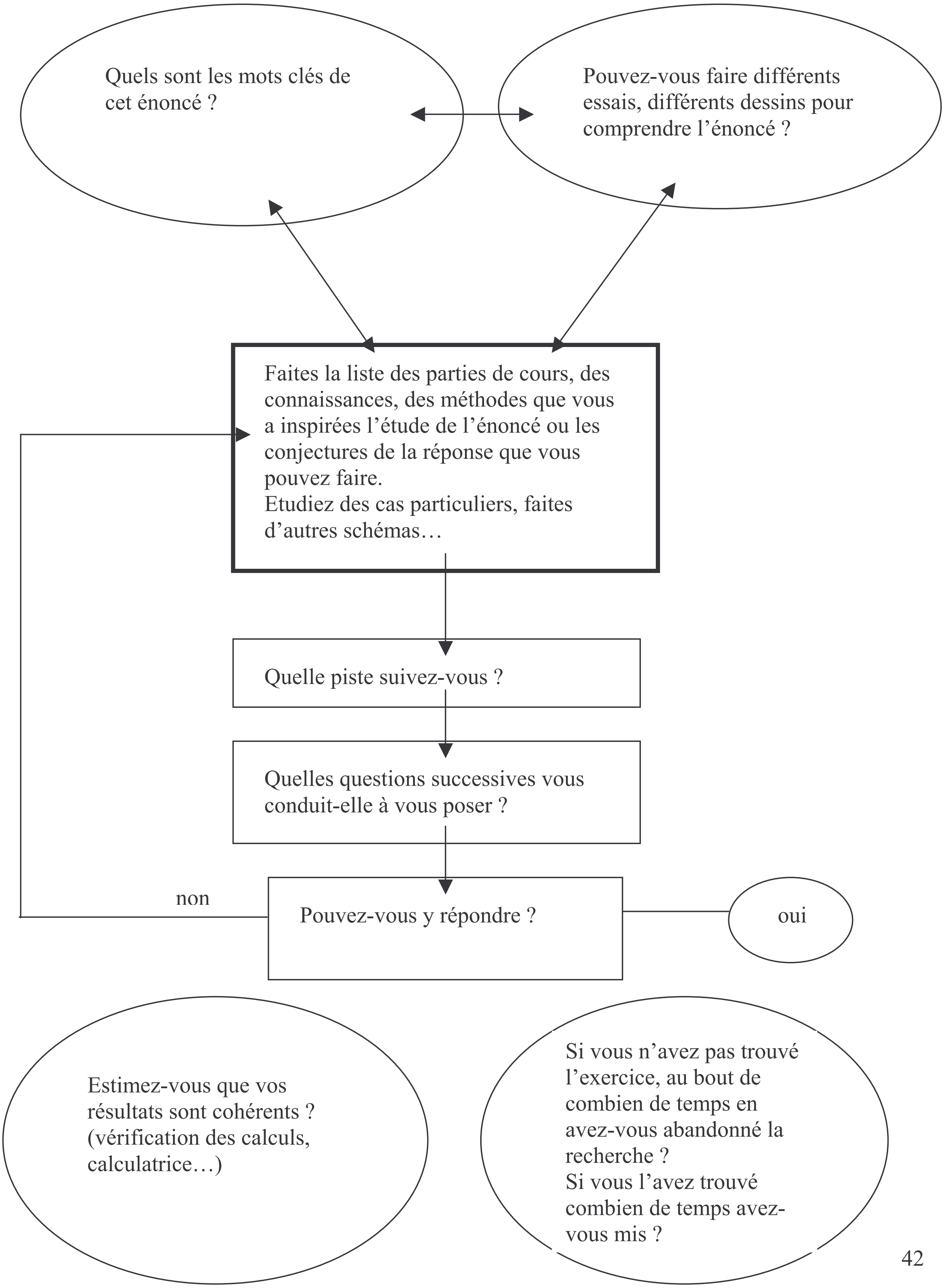
En guise de bilan intermédiaire, nous nous demandons si, dans un premier temps, il ne serait pas préférable de donner des injonctions plutôt que de poser des questions. En effet, il ne semble pas possible de se contenter d'aiguiller sur la méthode. En ce sens, nos interventions en classe devraient intervenir dans le but de « faire-faire ».

Suite aux remarques des élèves et forts de l'analyse que nous en avons faite, nous transformons de nouveau le questionnaire et remodelons la mise en page de notre « outil » pour obtenir une forme définitive bien que très certainement perfectible : le temps nécessaire à la tester nous aura fait défaut…

Questionnaire version 4

« OUTIL » POUVANT AIDER A LA RECHERCHE D’UN EXERCICE

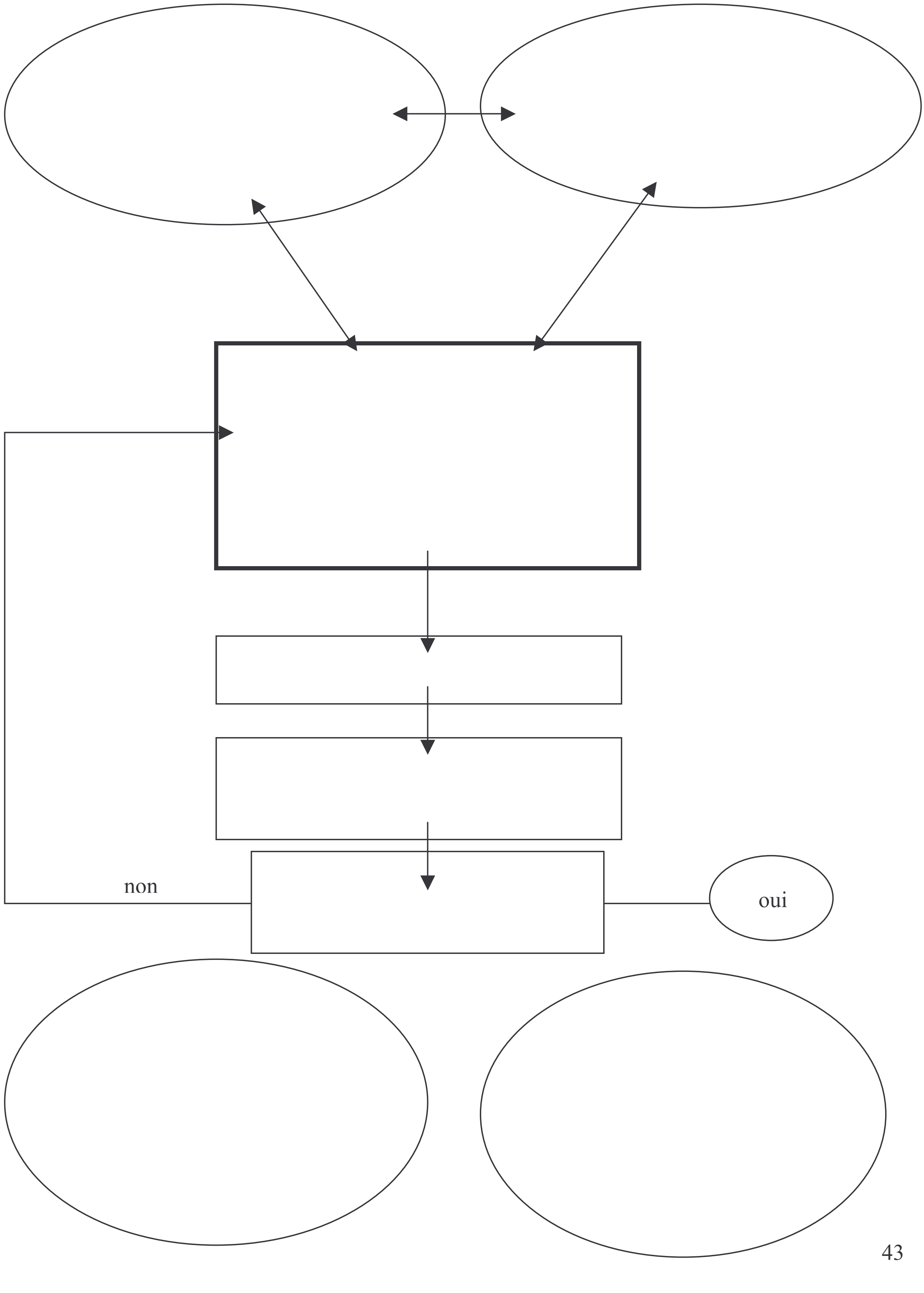
A priori cet exercice vous plaît-il ?



Questionnaire version 4, vide

« OUTIL » POUVANT AIDER A LA RECHERCHE D'UN EXERCICE

<u>A priori cet exercice vous plaît-il</u> ?



Il nous semble que cette version 4 (et 4 « vide ») est utile à l'élève : elle lui permet de s'engager dans un questionnement, elle évite la page blanche, elle montre la nécessité de l'apprentissage du cours, et celle du contrôle des résultats.

Le fait de le compléter, pour chaque problème, aide l'élève à garder une trace écrite de son travail y compris au plan méthodologique.

Il est sans doute préférable de l'expérimenter en classe, avec les élèves, lors d'une première recherche, puis de les habituer à l'utiliser - version 4 « vide » - dans le cadre de leur travail à la maison.

L'enseignant possède ainsi une trace de leur questionnement lors de la remise des copies. L'aide peut alors être mieux ciblée. Le but étant, au final, de se passer de cet outil dès qu'il y a déblocage…

CONCLUSION

<u>BILAN DU GROUPE</u> :

Concernant le déroulement des séances d'expérimentation

Il est important, comme nous l'avait conseillé Jean-Pierre RICHETON, de chercher le premier problème avec les élèves et de provoquer un débat. Echanger les idées, les lister ; leur montrer comment nous, « spécialistes », cherchons. Il est aussi important, comme nous l'avons déjà dit, de prévoir un temps conséquent de recherche. Il est souhaitable de pouvoir faire le lien entre l'exercice cherché et les parties du programme dont il relève tant comme réinvestissement - par exemple le problème n°6 pour les barycentres - que comme introduction d'une nouvelle notion - problème n°6 pour les homothéties - Cependant nous pensons, de façon complémentaire, qu'il est essentiel aussi de proposer des problèmes qui soient, à priori, déconnectés du quotidien de la classe afin de donner la possibilité aux élèves de mobiliser des notions antérieures, éventuellement mêlées à des notions nouvelles - voir l'exemple de l'annexe 7 : recherche d'une fonction avec les notions de vecteurs, tangentes et équation différentielle -

Apports du problème à prise d'initiative

<u>En terme d'activité mathématique</u> :

- Les problèmes à prise d'initiative aident à mettre en évidence la nécessité de l'apprentissage de certaines techniques - par exemple le problème n°3 qui met en jeu des compétences de constructions - et d'une bonne imprégnation du cours - par exemple le problème n°4 dans lequel la définition du cercle permet d'aboutir -
- Ils permettent aux élèves et à l'enseignant de repérer et d'identifier des erreurs récurrentes - par exemple dans le problème n°2 : « $\sqrt{a^2+b^2}$ et $a + b$ » -, certaines confusions dans les raisonnements - par exemple dans le problème n°4 : la différence entre condition nécessaire et condition suffisante - et, enfin, de renvoyer la classe à ces erreurs, souvent qualifiées d'erreurs d'étourderie, afin de pouvoir s'en prémunir à l'avenir.
- Ils développent les qualités de réflexion et d'observation et apprennent à extraire des informations du texte d'un problème avec comme objectif de les relier à leurs savoirs et savoir-faire.

Du côté des élèves :

- Ces problèmes les aident à se « mettre en recherche » car ce qui compte ici c'est la détermination de pistes de recherches et non l'aboutissement complet de ces recherches.
- Ils incitent à **oser écrire**.
- Ils apprennent aussi à **réfléchir** de façon spécifique en identifiant des outils permettant de vérifier la **cohérence** de ce que l'on a trouvé - par exemple : l'examen de cas particuliers, les vérifications d'ordre calculatoire -
- Ils doivent induire une **valorisation** d'idées, même non abouties, afin de redonner de la **confiance**.
- Ils apprennent à ne pas être « sec », à **s'auto-questionner** - le questionnaire est une aide au « déclenchement » des idées -
- Ils favorisent un réel investissement et intéressent même les moins scolaires de nos élèves…
- Ils permettent de prendre conscience de la nécessité de **se donner du temps** pour trouver.
  Nous espérons qu'ainsi, chez eux, une part non négligeable des élèves ne désespérera plus aussi vite !
- Ils peuvent entraîner une réussite de nature sensiblement différente de celle qui peut survenir dans le cadre de la recherche d'exercices plus classiques. Ceci est de nature à redonner confiance à certains élèves, quelques peu démotivés, et ce d'autant plus que toute recherche, même non aboutie, doit être encouragée dans la mesure où aucun échec n'est définitif, à priori, puisqu'il devrait offrir la possibilité de « rebondir » en s'engageant sur une autre piste motivée.
- Ils permettent de développer des méthodes de recherche en faisant différents essais, dessins ou vérifications dans des cas particuliers, de s'interroger sur la pertinence de ses résultats, sur la cohérence de sa démarche…On constate combien certains élèves mettent peu en doute ce qu'ils produisent et en quoi cela peut entraîner de graves erreurs.
- Ils peuvent entraîner un regain d'intérêt pour les mathématiques et concourir, par là même, à « aller dans la bonne direction » par ces temps de disette que traverse l'enseignement supérieur scientifique ! Et, pourquoi pas, donner envie à plus d'élèves de choisir la spécialité maths en terminale.

Voici quelques témoignages d'élèves concernant leur rapport à ce type de travail sur les problèmes à prise d'initiative :

« C'est très intéressant. Cela nous permet de progresser car je n'en résolvais aucun au début de l'année et, au fur et à mesure, j'y suis arrivé » (élève de 1ère S)
« Les exercices de recherche sont intéressants, ils développent notre esprit mathématique. Personnellement, ils m'ont encouragé car j'arrivais souvent à les résoudre, ou à trouver des idées » (élève de 1ère S)
« J'ai bien aimé les problèmes de recherche, par exemple celui sur la formule de Héron. C'est finalement, pour les élèves qui n'ont pas les maths en horreur, une façon moins bridée de les aborder, parce que ces problèmes ne sont pas présentés à l'intérieur d'une leçon…et on est content de trouver une solution, même si on voit bien, parfois, qu'elle n'est pas encore satisfaisante » (élève de 1ère S)
« Les travaux de recherche sont bien, c'est intéressant, c'est marrant, ça fait travailler la réflexion personnelle » (élève de 1ère S)
« J'ai trouvé très bien les exercices de recherche et surtout les guidages que vous donniez, à savoir : à quoi cela nous faisait penser. Je pense que c'est très utile pour les exercices en temps normal. C'est une démarche efficace qui peut nous faire avancer » (élève de 1ère S)
« La recherche est libre et plonge réellement l'élève dans l'aspect de résolution de problèmes » (élève de Tle S)
« Les problèmes permettent de découvrir la joie du raisonnement mathématique » (élève de Tle S)
« Ce sont les séances de module et de recherche qui m'ont le plus surprise cette année. Mon meilleur souvenir aura été la formule de Héron, en effet l'idée de me dire que cette formule a été trouvée par un grand savant et que nous avons réussi à la trouver, m'a apporté une grande satisfaction et une grande fierté » (élève de Tle S)

Du côté de l'enseignant :

- Ils impliquent une modification des pratiques au quotidien - on prend l'habitude d'ouvrir davantage le questionnement, en particulier en classe, mais aussi plus généralement dans les textes d'exercices, de devoirs,…. - La recherche de problèmes à prise d'initiative conduit à revisiter les énoncés des problèmes classiques et à les proposer, progressivement, sans question-guide.
- Ils demandent de laisser du **temps** aux élèves en classe afin qu'ils puissent s'en donner aussi chez eux, ce qui n'est pas souvent le cas… Il s'agit de leur « faire toucher du doigt » le fait qu'il faut **apprendre à se donner du temps et que cela peut aider à trouver !**
- Il est utile de montrer aux élèves les divers apports des problèmes ouverts, directement liés aux cours ou bien à des méthodes de recherche.
- Il est dynamisant de voir les élèves chercher, trouver des méthodes originales, se questionner.

- Il est éclairant de relever leurs difficultés « en direct » et pas seulement en corrigeant leurs copies : **ils sont acteurs** et nous spectateurs, légèrement animateurs !
- Annie a proposé un prolongement à ses élèves : des interrogations écrites « ouvertes » du type : « quelles connaissances avez-vous concernant le mot *tangente* ? », ou « Suite arithmétique, suite géométrique, qu'en dire ? »
- Par contre, il est difficile de tout faire dans un temps restreint en tant qu'enseignant : enseigner les notions nouvelles et faire des gammes, prendre du temps pour la recherche de problèmes, faire des devoirs et en faire le bilan,…

Les réponses aux questionnaires

Elles contiennent des informations précieuses sur les méthodes personnelles de recherche : difficultés à lire l'énoncé pour qu'il devienne une aide, pauvreté des notions de cours identifiées, non prise en compte du verbe d'injonction présent dans l'énoncé...Le retour en classe peut être l'occasion de conseils d'autant plus écoutés que le problème a intéressé les élèves qui, souhaitant réussir, sont réellement demandeurs de conseils méthodologiques bien qu'ils soient présents dans le questionnaire.

Quelques difficultés rencontrées par le groupe

Il est parfois difficile de se couler dans un scénario proposé par les « autres » membres du groupe. Ces scénarios vont parfois à l'encontre de nos habitudes ou convictions. Par contre, il nous semble que la consigne *« écrivez tout ce qui vous semble envisageable pour résoudre le problème. N'hésitez pas à explorer toutes les pistes qui vous viennent à l'esprit et laissez une trace écrite de vos essais, même s'ils n'aboutissent pas »* doit absolument être donnée et que les élèves y répondent d'autant mieux que l'enseignant est motivé et persuadé de son bien fondé.

D'autre part, il est difficile d'éviter chez certains élèves la prégnance, dans leur recherche, des connaissances en cours immédiat d'apprentissage.

En Terminale S, l'introduction de problèmes à prise d'initiative n'est actuellement pas aisée car ces élèves ne sont pas familiarisés à ce type de travail. Ceci nous semble plaider fortement pour une formation la plus précoce possible en la matière et, en tout cas, au Collège en continuité avec ce qui est dorénavant enclenché dès l'Ecole Primaire - voir les nouveaux programmes du 25 janvier 2002 -.

De plus le temps manque…

<u>LES PISTES ABANDONNEES</u> :

- Nous n'aurons pas fait de listes de problèmes à prise d'initiative par niveau. Nous avons travaillé essentiellement en $1^{ère}$S et, un peu moins en Terminale S au cours de l'expérimentation. Nous avons cependant regroupé quelques exemples de problèmes donnés en annexe 8.
- Nous n'aurons pas davantage travaillé de façon approfondie différents scénarios de passation qui auraient pu permettre de mener à bien un problème à prise d'initiative en classe. Plusieurs essais auront été faits : se taire… ; amener un questionnement après un temps de recherche personnelle silencieuse ; mettre les élèves par groupes après un temps de recherche individuelle...

  Il n'y a sûrement pas de scénario unique et celui-ci est probablement à aménager pour chaque problème fait en classe.
- Nous n'aurons pas non plus répondu, compte-tenu de la difficulté d'une telle étude dans le temps imparti à notre recherche-formation, à l'une de nos premières questions, à savoir :

  Quels impacts sur les élèves dans les autres champs de leur activité mathématique et, en particulier, quels progrès techniques au niveau calculatoire ?
- Nous n'aurons pas, enfin, creusé la problématique, pourtant fondamentale, de **l'évaluation** des productions d'élèves lors de la recherche d'un problème à prise d'initiative. Nous avons bien testé une grille d'évaluation mais celle-ci s'est avérée trop lourde. Par ailleurs, nous avons évalué chaque problème en fonction de critères qui lui étaient propres et de l'ensemble des productions d'élèves – par exemple :

  Y-a-t-il des essais ? une démarche amorcée cohérente ? Une démarche presque aboutie ?
  Des calculs bien menés ?

<u>PERSPECTIVES</u> :

Evolution possible de l'outil

L'outil n'a pas été suffisamment testé pour que l'on soit certain de sa pertinence. Il nous semble donc devoir être davantage expérimenté pour savoir s'il doit être amélioré ou rejeté ! Nous pensons, par exemple, qu'il serait bon de rajouter une bulle précisant **les objectifs de la recherche** car les élèves ont tendance à les perdre de vue en cours de raisonnement. Il semble aussi que nous n'ayons pas assez présenté le questionnaire ; nous ne l'avons pas assez fait fonctionner en classe avant de le proposer, quasiment en autonomie, aux élèves. Voici quelques réflexions de Jean-Pierre RICHETON sur cet outil :

« …Mais il est difficile de mettre "tout" sur un seul schéma... Personnellement, c'est ainsi que je procède : je pencherais plutôt pour effectuer des synthèses en schématisant chaque démarche pour un problème donné de sorte à dégager des invariants (que vous avez relevés dans vos annexes) mais aussi des points clés selon la typologie du problème [selon qu'il s'agit d'un problème de géométrie, de recherche de lieux, vectoriel, analytique, mise en équation (choix de ou des inconnue(s)...) etc., liste très loin d'être exhaustive, on s'en doute !]
Le but serait que les élèves n'aient pas "un" outil mais de nombreux outils d'un même type un peu comme un jeu de clés de différentes tailles selon les boulons que l'on doit visser ou dévisser… »

Valeur du scénario

Nous tenons, là encore, à citer les réflexions éclairantes de Jean-Pierre RICHETON à ce sujet *:*

« …Je crois que vous avez encore de bonnes pistes de réflexion à explorer en ce qui concerne le rôle du professeur. En effet, ce que j'ai appelé « changeons de scénario ! » dans l'un de mes articles, me semble important pour mettre les élèves sur le chemin de la réussite dans des travaux de recherche. Il ne s'agit donc pas, en période d'apprentissage, de ne jamais intervenir. Ce serait absurde de ne pas faire profiter nos élèves de notre savoir-faire. Par contre, il ne s'agit pas non plus de redonner tous les a), b) c) oralement... Il s'agit de faire réfléchir les élèves un peu selon le schéma de votre outil : le faire systématiquement en début de séance (cela est indispensable pour les premières séances) avec des échanges en classe entière qui sont souvent très riches par les pistes évoquées mais qui permettent aussi de ne pas s'engager sur d'autres en montrant qu'elles ne sont pas pertinentes... Ce n'est pas du temps perdu... trop souvent je crois que l'on continue à privilégier la résolution et on "triche" en donnant toutes les clés et on n'accorde que rarement assez de temps et ***de valeur pédagogique*** *à comment trouver une démarche pertinente et s'y engager, qu'elle aboutisse ou non… »*
Et, enfin :
« Le tout est en effet qu'au final les élèves aient acquis un peu d'autonomie avec suffisamment d'esprit critique pour sortir d'une stratégie en cas d'impasse ou d'erreur manifeste : c'est le côté transférable bien au-delà des mathématiques. »

Lien avec la trace écrite

Celui-ci nous semble central et nous paraît devoir être pris en compte pour chacun des problèmes abordés - cours utilisé ; mots déclencheurs de méthodes dans le texte… -
La spécificité et la difficulté tiennent ici certainement à la multiplicité, en liaison avec les natures diverses des problèmes cherchés, et à l'indispensable individualisation que l'enseignant a à gérer en la matière…

Effectivité de l'ouverture des problèmes

Il nous semble important de ne pas perdre de vue que ces problèmes à prise d'initiative doivent apparaître comme tels aux élèves. Dans la perspective d'une formation qui s'élargirait et se systématiserait, dès le Collège, il apparaît indispensable d'enrichir la collection d'exercices afin de continuer à proposer des problèmes qui restent suffisamment ouverts.

Ce travail en recherche-formation qui s'achève fut, pour chacun de nous, une expérience riche. Le temps imparti n'aura pas été de trop pour permettre aux membres du groupe de mieux se connaître, tout au long de ces trois ans, d'échanger sur leurs pratiques et donc d'approfondir leur réflexion sur leurs méthodes d'enseignement.

Au final, nous retirons une impression agréable de ce travail riche et intense. Nous avons dégager quelques pistes ; il reste cependant, cela va de soi, beaucoup à faire, pour aboutir à une véritable expertise, en la matière, ainsi que pour intégrer au mieux cette pratique à chaque niveau d'enseignement.

Annexe 1 : Problème n°1 posé en 1ère S en 2002

Existe-t-il un triangle ABC d'aire maximale sachant que AB = AC = 12 cm ?

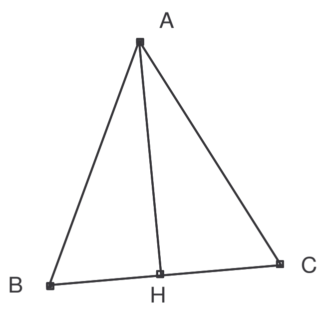
Méthode 1 : On pose $x = \frac{BC}{2}$. L'aire est alors $S(x) = \sqrt{x^2(144 - x^2)}$.
On considère la fonction f telle que $f(x) = s(x)^2$.
Soit on étudie les variations.
Soit on conjecture, à l'aide de la calculatrice, qu'elle admet un maximum de valeur 5184 et on démontre que pour tout $x \in [0 ; 12]$, $f(x) \leq 5184$ avec $5184 = f(\sqrt{72})$ pas difficile comme calcul.

Méthode 2 :
Soit H le pied de la hauteur issue de C.
L'aire de ABC est $\frac{AB \times CH}{2} = 6 \times CH$. Or $CH^2 = AC^2 - AH^2$. CH^2 est maximal lorsque AH^2 est minimal donc lorsque A = H. D'où triangle rectangle en A. Avec CH longueur positive maximale si et seulement si CH^2 maximal.

Méthode 3 :
Soit b la longueur de la hauteur issue de A, et $a = \frac{BC}{2}$.
L'aire de ABC est a b. Or $ab = \frac{a^2 + b^2 - (a-b)^2}{2} = \frac{144 - (a-b)^2}{2}$. Donc ab est maximal lorsque a = b.
D'où un triangle rectangle en A.

Méthode 4 :
Soit le cercle de centre A et de rayon 12 cm, soit [AB] un de ses rayons, le point C est sur ce cercle.
L'aire du triangle est $\frac{1}{2}AB´\ CH$ où H est le pied de la hauteur issue de C et est maximale quand CH est maximale donc quand CH est le rayon (la plus grande corde d'un cercle est le diamètre, par exemple…). Et si [CH] est le rayon alors H = A et le triangle est rectangle.

Méthode 5 :



Soit H le pied de la hauteur issue de A. L'aire de ABC est maximale si et seulement si l'aire de ABH est maximale, or ABH est un triangle rectangle, il est donc inscrit dans un cercle dont le diamètre est [AB], soit K le pied de la hauteur de ABH issue de H, l'aire de ABH est 6KH et KH est maximale quand KH est le rayon donc quand BAH est isocèle.

Méthode 6 : L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2}AB \times AC \times \sin(B\hat{A}C)$ et est donc maximale lorsque le sinus est maximal, donc lorsque l'angle $B\hat{A}C$ est droit.

Expérimentation :

<u>Expérience 1 :</u>

« Ce travail n'est pas noté. Il a pour but d'étudier vos réactions face à un exercice où aucune indication n'est donnée sur la (ou les !!) façon(s) de le résoudre.

Etape 1 :

Recherche **individuelle** pendant 25 mn sans **aucune** intervention du professeur.

- Laissez par écrit, sur une copie où vous mettrez votre nom, toutes les traces de votre recherche (pas d'effaceur, pas de gomme, barrez si erreur) en expliquant votre démarche.
- Lorsque vous avez choisi une piste, essayez de la mener à son terme. Si vous l'abandonnez, n'effacez rien, tirez un trait et indiquez votre nouvelle direction de recherche.
- On ne vous demande pas un document « propre ». Il faut simplement que le correcteur puisse comprendre vos démarches.

Etape 2 :

Au bout de 25 mn, .

- Regroupez-vous par 4
- Mettez en commun vos recherches, débattez entre vous pour valider les unes et rejeter les autres.
- Sur une copie double, rédigez alors la (ou les) méthodes retenue(s). Si une des méthodes proposées par l'un d'entre vous vous paraît juste, inutile de reprendre la rédaction : indiquez seulement sur la copie collective quelle méthode a été validée par votre groupe. Si vous rejetez une méthode proposée par l'un d'entre vous, indiquez-le et expliquez pourquoi .
- Vous pouvez questionner le professeur mais vous devrez alors formuler votre question **par écrit** et noter **par écrit** la réponse du professeur.

Etape 3 :

A la fin du module, rendre la copie double (production du groupe) et les quatre copies correspondant aux recherches individuelles ».

<u>Expérience 2 :</u>

Travail de groupe réalisé à la maison. (Exercice introductif aux généralités sur les fonctions assez proche) La consigne suivante est donnée : *Laissez toutes les pistes de recherche que vous aurez ouvertes*.

<u>Expérience 3 :</u>

Expérimentation en classe entière

Je demande d'écrire la consigne « *Ecrire tout ce qui vous semble envisageable pour résoudre le problème. N'hésitez pas à explorer toutes les pistes qui vous viennent à l'esprit, et laissez une trace écrite de vos essais même s'ils n'aboutissent pas* ». Je dicte ensuite l'énoncé.

Ces élèves ont déjà fait le test de début d'année, j'ai dit que je poursuivais un travail avec des collègues, ils n'ont aucune hésitation à se mettre au travail, individuellement comme je leur ai demandé, et avec beaucoup de sérieux

<u>Expérience 4 :</u>

En début d'heure, j'ai indiqué aux élèves qu'ils allaient chercher, par groupes de 2 ou 3 maximum, un problème pour lequel ils ne seraient pas aidés ou guidés par des questions mais dont l'énoncé serait bref. J'ai ensuite demandé que chaque élève ait une copie personnelle sur laquelle chacun pouvait, et même devait écrire tout ce qui lui semblait de nature à permettre la résolution du problème. J'ai ensuite précisé que chacun devrait, chez soi, rédiger le plus rigoureusement possible les résultats de sa recherche, que celle-ci ait abouti ou pas, qu'il(elle) ait exploré une unique voie ou plusieurs et j'ai indiqué que je n'interviendrais pas pour apporter quelque aide que ce soit, ce que j'ai respecté pendant le reste de la séance. Puis j'ai écrit l'énoncé au tableau.

Pendant que les élèves ont travaillé, je me suis déplacé de groupe en groupe, en restant parfois assez longuement auprès de l'un d'entre eux, pour écouter et observer ce qui était dit et écrit.

Les consignes suivantes sont données :

- Pendant un quart d'heure chacun doit réfléchir tout seul.
- Chacun doit écrire sur sa copie tout ce qui lui semble envisageable pour résoudre ce problème. N'hésitez surtout pas à explorer toutes les pistes qui vous viennent à l'esprit et laissez une trace de vos essais sur votre copie, même si ceux-ci n'aboutissent pas.
- Quand le quart d'heure sera écoulé vous tracerez un trait et mettrez en commun le fruit de vos recherches jusqu'à la fin de l'heure.
- Ensuite vous rédigerez la solution, pour le prochain TD comme un devoir maison.

<u>Bilan</u>

Peu d'élèves aboutissent, la réussite dépend un peu du moment où est donné cet exercice et si les élèves sont habitués à traiter des fonctions sur des situations analogues, dans une classe aucun n'a pensé à une méthode géométrique , dans une autre le prof note : « N'ayant pas tendance à introduire les fonctions par des problèmes concrets, peu d'élèves ont pensé fonctions mais, ayant au niveau de toutes les classes de seconde l'an dernier beaucoup travaillé la géométrie, plusieurs ont tracé un cercle » ou « Ils ont en tête le cours, les exercices traités précédemment. Ils cherchaient désespérément un trinôme »

Par contre on remarque beaucoup d'erreurs de calcul grave, que le contenu des copies est pauvre, qu'ils ont du mal à changer de piste, que lorsqu'ils sont bloqués, le questionnement pertinent ne vient pas. Ils ont eu du mal à valider, corriger les démarches de leur camarade. Les copies laissent peu de place à une expérimentation initiale, la nature du problème les ramenant à une situation connue, pas des plus efficaces. Pas de démarches non cohérentes mais des abandons signalés sur la difficulté technique, que ce soit sur une étude des variations ou sur une comparaison. géométrique.

D'autre part, même si la conjecture a rarement été écrite ou dite, quasiment tous les élèves ont sur leur copie obtenu 72 cm^2… ! souvent en faisant l'hypothèse que le triangle est rectangle et en effectuant les calculs dans ce cas.

Personne n'avait vu la méthode 6 …

Conclusion

Ce problème est très intéressant il amène les élèves à réfléchir et devrait les conduire à mieux développer leur questionnement, leur esprit critique. Nous n'avons pas eu l'impression que des élèves bloquaient durant le temps imparti.

Il peut être donné en seconde (cf activité du lycée Bellevue Albi ou article de Jean Paul Bardoulat dans le bulletin vert de l'APMEP n°451 p165).

Sa place dans le programme de première S était destinée à introduire ou à activer l'étude de fonctions composées, mais surtout il peut être réactivé avec les fonctions trigonométriques ou dans un cadre plus géométrique.

Annexe 2 : Problème n°2 posé en 1èreS en 2002

Les longueurs a, b et c des trois côtés respectifs [BC], [CA] et [AB] d'un triangle ABC étant données, il est facile d'exprimer son périmètre en fonction de a, b et c.

Pouvez-vous établir une formule permettant de calculer l'aire S du triangle ABC seulement en fonction des longueurs des côtés ?

Des résolutions possibles.

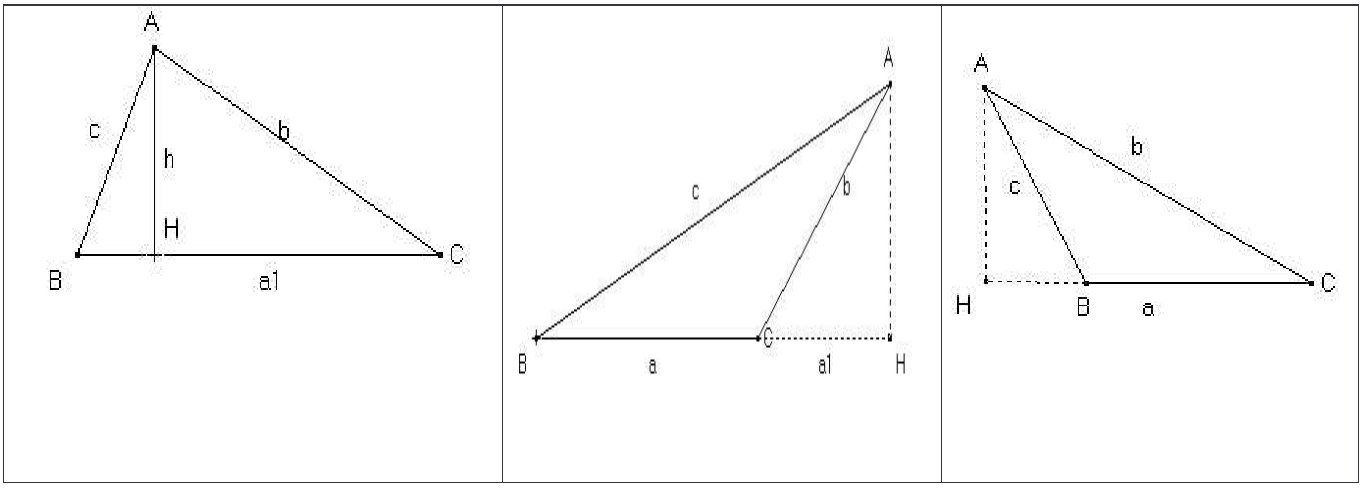
Méthode 1.

● Le triangle ABC est rectangle en B ou en C, on a $S = \frac{ac}{2}$ ou $S = \frac{ab}{2}$.

● Le triangle ABC n'est rectangle ni en B, ni en C.

Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

Posons AH = h et CH = a_1



On a $S = \frac{ah}{2}$

●Si $H \in [BC]$, $H \neq B, H \neq C$	● Si $H \in [BC)$ et $H \notin [BC]$	● Si $H \in [CB)$ et $H \notin [BC]$
$h^2 = b^2 - a_1^2 = c^2 - (a - a_1)^2$	$h^2 = b^2 - a_1^2 = c^2 - (a + a_1)^2$	$h^2 = b^2 - a_1^2 = c^2 - (a_1 - a)^2$
d'où $c^2 = b^2 + a^2 - 2aa_1$,	d'où $c^2 = b^2 + a^2 + 2aa_1$	d'où $c^2 = b^2 + a^2 - 2aa_1$
soit $a_1 = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}$	soit $a_1 = -\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}$	soit $a_1 = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}$

Or, quelle que soit la position de H, on a $h=\sqrt{b^2-a_1^2}$ donc $S=\dfrac{a}{2}\sqrt{b^2-\dfrac{(b^2+a^2-c^2)^2}{4a^2}}$

$S=\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{4a^2b^2-\left(b^2+a^2-c^2\right)^2}{4a^2}}$ $S=\dfrac{1}{4}\sqrt{(2ab-b^2-a^2+c^2)(2ab+b^2+a^2-c^2)}$

$S=\dfrac{1}{4}\sqrt{(c^2-(a-b)^2)((a+b)^2-c^2)}$ d'où $S=\dfrac{1}{4}\sqrt{(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+c+b)}$.

En posant p = $\dfrac{a+b+c}{2}$ on écrit a + b = 2p − c, etc..

on a : $S=\dfrac{1}{4}\sqrt{(2p-2a)(2p-2c)(2p-2b)(2p)}$ soit $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Méthode 2.

On a $S=\dfrac{1}{2}bc\sin\hat{A}$ donc $S^2=\dfrac{b^2c^2\sin^2\hat{A}}{4}$ or $\sin^2\hat{A}=1-\cos^2\hat{A}$

donc $4b^2c^2\sin^2\hat{A}=4b^2c^2-4b^2c^2\cos^2\hat{A}$

de plus $\cos\hat{A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

par conséquent $4b^2c^2\sin^2\hat{A}=4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2$

donc $16\dfrac{b^2c^2\sin^2\hat{A}}{4}=4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2$

donc $16S^2=\left(2bc-b^2-c^2+a^2\right)\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)$

donc $16S^2=\left(a^2-(b-c)^2\right)\left((b+c)^2-a^2\right)$

donc $16S^2=(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)$

or $2p=a+b+c$

donc $16S^2=(2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)2p$

donc $S^2=(p-b)(p-c)(p-a)p$

donc $S=\sqrt{(p-b)(p-c)(p-a)p}$

Les protocoles d'expérimentation

Consignes relatives à la recherche du problème proposé.

Ce travail n'est pas noté mais chaque initiative, chaque démarche est évaluée. L'objectif est d'étudier vos réactions face à un exercice où aucune indication n'est donnée sur la (ou les !!) façon(s) de le résoudre, de développer votre questionnement en situation de recherche.

Expérimentation 1	Etape 1	Etape 2	Etape 3
Expérimentation 2	Etape 1	Etape 2	Etape 3
Expérimentation 3	Etape 1	Etape 2	Etape 3 bis
Expérimentation 4	Etape 1	Etape 2 bis	

Etape 1 :

Recherche **individuelle** pendant 30 mn sans **aucune** intervention du professeur.

- Laissez par écrit, sur une copie où vous mettrez votre nom, toutes les traces de votre recherche (pas d'effaceur, pas de gomme, barrez si erreur) en expliquant votre démarche.
- Lorsque vous avez choisi une piste, essayez de la mener à son terme. Si vous l'abandonnez, n'effacez rien, tirez un trait et indiquez votre nouvelle direction de recherche.
- On ne vous demande pas un document « propre ». Il faut simplement que le correcteur puisse comprendre vos démarches.

Etape 2 :

Au bout de 30 mn,

- Regroupez-vous par 4
- Mettez en commun vos recherches, débattez entre vous pour valider les unes et rejeter les autres.
- Vous pouvez questionner le professeur (soit pour vous aidez dans votre questionnement soit pour valider votre formule). Vous devrez alors formuler votre question **par écrit** et noter **par écrit** la réponse du professeur.

Etape 3 :

Distribution de la fiche suivante dont l'objectif est de passer de votre formule à la formule de Héron.

Formule de Héron

On reprend les mêmes notations que précédemment.

Le mathématicien grec Héron (1er siècle après J-C) a démontré la formule suivante :

S = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où p est le demi périmètre du triangle

Soit vous avez obtenu une formule répondant au problème posé et vous pouvez démontrer que cette formule est équivalente à la formule de Héron.
Soit vous n'avez pas validé de formule et vous démontrez la formule de Héron.
A la fin du module, rendre la copie double (production du groupe) et les quatre copies correspondant aux recherches individuelles.
Cette étape est complétée par des applications, voir en annexes.

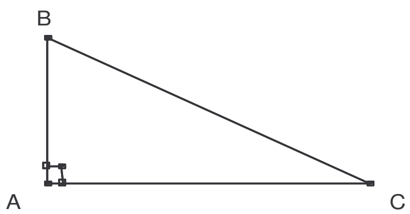
Etape 2 bis :
Distribution de la fiche suivante dont l'objectif est de passer de votre formule à la formule de Héron.
Formule de Héron
On reprend les mêmes notations que précédemment.
Soit vous avez obtenu une formule répondant au problème posé et vous pouvez démontrer que cette formule est équivalente à la formule de Héron. (Mathématicien 1[er] siècle avant JC) :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ où } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Soit vous n'avez pas validé de formule et vous démontrez la formule de Héron.

Cette formule présente un intérêt opératoire pratique :
« Les jaugeurs », lors d'une compétition de voile, vérifient l'aire d'une voile triangulaire à l'aide de cette formule.
De même on utilise cette formule pour mesurer l'aire d'une parcelle de terrain lorsqu'on connaît la longueur des côtés et des diagonales (mesures réelles ou cadastrales) (on découpe pour cela cette parcelle en triangles).

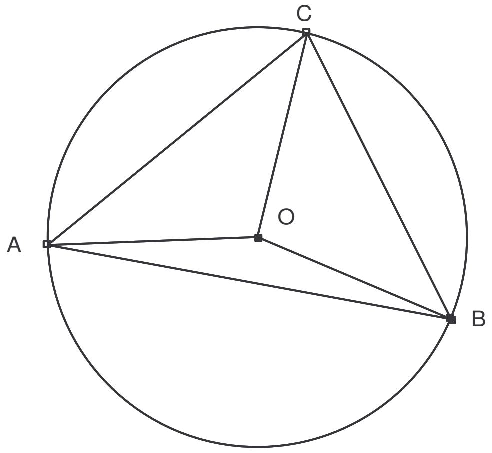
Pour vous aider voilà un formulaire :



ABC triangle rectangle en A

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\cos \hat{B} = \frac{c}{a}$ $\sin \hat{B} = \frac{b}{a}$ $\cos^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{B} = 1$



La généralisation dans un triangle quelconque conduit à

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$

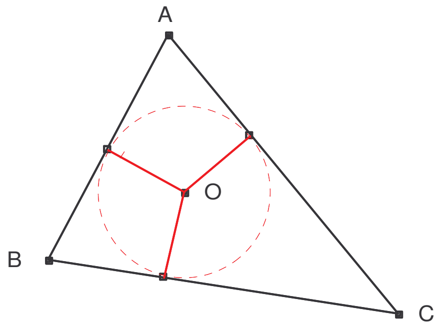
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

ABC triangle quelconque inscrit dans un cercle de rayon R.

Les théorèmes concernant angles au centre et angles inscrits s'appliquent

$$B\hat{O}C = 2B\hat{A}C$$

$$\mathrm{R} = \frac{a}{2\sin\hat{A}} = \frac{b}{2\sin\hat{B}} = \frac{c}{2\sin\hat{C}}$$



Dans tout triangle on peut inscrire un cercle de rayon r

Et on a 2p = a+b+c et soit S aire du triangle

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}\ \mathrm{p\ r}$$

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}\ bc\sin\hat{A} = \frac{1}{2}\ ac\sin\hat{B} = \frac{1}{2}\ ab\sin\hat{C}$$

Dans un triangle équilatéral on trouve $\mathrm{S} = \sqrt{\frac{3\mathrm{a}^4}{16}}$

La généralisation de cette formule conduit-elle à

$\mathrm{S} = \frac{1}{4}\sqrt{3\mathrm{a}^2\mathrm{bc}}$? $\mathrm{S} = \sqrt{p\frac{a}{2}\frac{b}{2}\frac{c}{2}}$? la formule de Héron ?

Etape 3bis :

Le mathématicien grec Héron (1[er] siècle après J-C) a démontré la formule suivante :

$\mathbf{S} = \sqrt{\mathbf{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

où p est le demi-périmètre du triangle

Montrer que l'expression que vous avez obtenue est équivalente à la formule de Héron.

ou

Un élève de première S d'un lycée toulousain a mis en œuvre la démarche suivante pour répondre au problème posé.

Il a démontré que, pour un triangle équilatéral de côté a, $S = \sqrt{\frac{3a^4}{16}}$.

Il a ensuite conjecturé que des formules pour calculer l'aire d'un triangle quelconque pourraient être :

$S = \frac{1}{4}\sqrt{3a^2bc}$ ou $S = \sqrt{\frac{P}{2}\frac{a}{2}\frac{b}{2}\frac{c}{2}}$ ou $S = \sqrt{\frac{P}{2}\frac{P-2a}{2}\frac{P-2b}{2}\frac{P-2c}{2}}$

où P est le périmètre du triangle.

Que pensez-vous de ces conjectures ?

<u>Les observations.</u>

<u>Déroulement de la séance</u>

Déroulement de l'étape 1.

- Tous se mettent au travail, quelles que soient les classes.
- Au début :

  Dans une des classes, la plupart ont écrit la formule de l'aire avec la hauteur et ont appliqué le théorème de Pythagore une fois, d'où deux inconnues h une hauteur et la longueur d'un côté de l'angle droit relatif à cette hauteur. Un élève a pris un triangle isocèle. Deux ont la formule de l'aire $\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$, un semble penser que c'est fini !.

  Dans une autre, 80% des élèves ont rapidement engagé une démarche visant à exprimer h, très peu d'entre eux, ont pu mettre en relation les égalités pythagoriciennes, issues des deux triangles, et ont souvent rejeté, de manière surprenante, un des deux triangles. Un élève, à partir de mesures, a conjecturé : « $S = \frac{bc}{2}$ à un pourcentage d'erreur près » sans en donner le moindre sens.
- A mi-étape :

  Dans la première classe, on voit apparaître des erreurs de calcul (exemple $\sqrt{b^2 - a^2} = b - a$), des vecteurs ! (on travaillait sur Barycentre), les deux égalités déduites du théorème de Pythagore sont écrites. Une élève écrit : « il faut enlever ce x ! », mais la plupart ne les relie pas. Quelques élèves ont considéré des triangles particuliers. 4 ou 5 élèves sont passifs, d'autres n'avancent plus.
- Au final : 5 élèves sur 140 ont obtenu la formule $S = \frac{a}{2}\sqrt{b^2 - \frac{(b^2 + a^2 - c^2)^2}{4a^2}}$

Déroulement de l'étape 2.

- Dans une classe, ils sont contents de se mettre en groupe, ils échangent leurs productions, les lisent, puis mettent en commun.

Quelques questions : « y a-t-il des barycentres ? », « est-ce la bonne formule ? », « y a-t-il dans la formule le périmètre p ? », l'enseignant répond oui, non, souligne là où il y a une erreur de calcul sans la corriger.

Il semble qu'ils valident ou rejettent assez bien les bonnes ou mauvaises démarches.

4 groupes sur 9 sont presque au bout, les autres n'aboutissent pas et se lassent.

- Dans une autre, 8 groupes de 4 et 1 de trois se sont formés. Il y a 5 groupes qui ont appliqué le théorème de Pythagore dans deux triangles comprenant la hauteur et qui étaient convaincus que deux équations à deux inconnues ont une solution. Par contre la formule obtenue leur « faisait peur ».

  7 groupes obtiennent une formule correcte.
- Dans la troisième, ils ont poursuivi dans le traitement des deux égalités. Certains ont cherché d'autres orientations relatives à la somme des aires sans beaucoup plus de succès.

  Pendant ce temps, l'enseignant a confirmé des initiatives, invalidé le fatidique $\sqrt{a^2 - b^2} = a - b$, répondu à des questionnements relatifs aux calculs, relatifs à l'objectif « le périmètre doit-il intervenir dans la formule ? ». Deux groupes sur huit arrivent à la formule attendue.

Déroulement de l'étape 3.

- Dans une classe, ils sont impressionnés par cette formule, se disent que c'est impossible d'y arriver. Puis ceux qui n'avaient pas de formule, développent en général sans stratégie ce qui donne des calculs épouvantables. Ils s'arrêtent assez vite pour demander de l'aide. L'enseignant leur montre les facteurs qu'il est intéressant de regrouper, les identités remarquables qui apparaissent. Ils sont saturés de calcul et n'avancent plus.
- Dans l'autre, il y avait des a, b et c sur toutes les feuilles, les relancer fut dur !!!

  Suivant les conseils de l'enseignant, dans les groupes, les uns développaient leur formule, les autres celle de Héron avant de les comparer.

  3 groupes ont eu quelque chose de rigoureux, 3 autres y sont arrivés dans un sacré fouillis et les autres se sont découragés.

Déroulement de l'étape 2bis.

Bien que l'objectif du formulaire était de mettre à la disposition des élèves une banque de données. Sa distribution a vraiment interrompu la recherche et n'a relancé aucun élève.

Au bilan, 5 élèves ont eu des initiatives intéressantes sans en rester à une formule déduite du théorème de Pythagore et 5 autres élèves une fois la formule connue ont cherché à la transformer.

Déroulement de l'étape 3bis.

Au regard des premières recherches, le cadre concernant les conjectures ne sera pas utilisé.

Pour la majorité des élèves avant de proposer la formule de Héron, j'ai donné à chercher le problème suivant :

ABC un triangle tel que AB = 3, AC = 6 et BC = 7, AH = h et (AH) hauteur issue de A. Calculer h.

Une bonne réussite dans cette situation, - 60% d'élèves autonomes - , peut permettre de penser que cette particularisation sera parfois utilisable, il serait souhaitable de leur permettre de la remettre en œuvre.

Quant au retour au problème, un blocage de la situation vient du fait que le calcul de h ne se transfère pas dans le cadre algébrique.

Par la suite, la moitié des élèves se sont lancés dans la recherche de la formule de Héron. Une seule élève ne s'est pas engagée dans le développement mais dans une recherche de factorisation. La réussite est convenable.

Les conclusions.

Dans l'ensemble, le côté « risqué et fastidieux » du travail sur le calcul algébrique est motivé par la recherche d'une formule qui marquera les élèves car les deux grandeurs mises en jeu, aire et périmètre, n'ont encore jamais été reliées.

On peut mesurer un investissement réel malgré les difficultés rencontrées, la mise en commun semble nécessaire pour en relancer certains.

Ce travail permet de développer une certaine intelligence de calcul, une véritable autonomie et contribue à donner du sens. Ils ont à introduire des valeurs littérales, à leur donner du sens, à les relier, à exprimer une en fonction de l'autre puis recommencer à nouveau. C'est une démarche que l'on met en œuvre fréquemment en mathématiques.

Ce point de vue est largement développé dans le rapport sur le calcul de la commission Kahane paragraphes « « L'intelligence du calcul algébrique », « calcul algébrique et formules ». Cette formule est proposée en annexe, exemple 5 de ce rapport.

Complément à l'annexe 2

1. Cette formule présente un intérêt opératoire pratique :

« Les jaugeurs », lors d'une compétition de voile, vérifient l'aire d'une voile triangulaire à l'aide de la formule de Héron.

De même on utilise cette formule pour mesurer l'aire d'une parcelle de terrain lorsqu'on connaît la longueur des côtés et des diagonales (mesures réelles ou cadastrales) (on découpe pour cela cette parcelle en triangles).

2. Aire en tant que coefficient du centre d'inertie d'une plaque homogène.

Centres d'inertie d'une plaque homogène

Résultats admis :

Quelques principes utilisés par les physiciens :

1. **Exemples de base**

Le centre d'inertie de n masses ponctuelles est le barycentre des n points affectés de leur masse.

Cas particuliers : • Le centre d'inertie d'une tige homogène est le milieu de la tige.

• Le centre d'inertie d'une plaque triangulaire homogène est le centre de gravité du triangle délimitant cette plaque.

2. **Eléments de symétrie :**

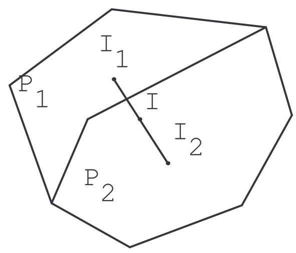
Si une plaque homogène admet un centre de symétrie I , alors son centre d'inertie est I.

Si la plaque homogène admet un axe de symétrie Δ, alors son centre d'inertie est un point situé sur Δ.

3. **Principe de juxtaposition**

Soit une plaque homogène P réunion des plaques P_1 et P_2 . On suppose que P_1 a pour centre d'inertie I_1 et pour aire a_1, que P_2 a pour centre d'inertie I_2 et pour aire a_2.

Alors, le centre d'inertie I de la plaque P est le barycentre de (I_1, a_1) et (I_2 , a_2).



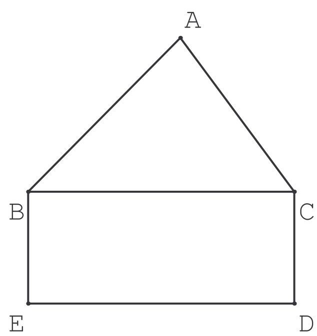
Etude d'un exemple :

La plaque homogène P est la réunion d'une plaque triangulaire ABC et d'une plaque rectangulaire BCDE.

On a AB = $4\sqrt{2}$, AC = 5, BC = 7 et CD = 3.

On note I le centre d'inertie de P, I_1 le centre d'inertie de la plaque délimitée par le triangle ABC et I_2 le centre d'inertie de la plaque délimitée par le rectangle BCDE.

Construire le point I, sur la figure ci-contre.



Annexe 3 : Problème n°3 posé en 1ère S en 2002

d_1, d_2, d_3 sont trois droites concourantes en un point G .
Construire un triangle tel que ces trois droites en soient les médianes ».

Prolongement du problème :

Pouvez-vous construire un autre triangle tel que ces mêmes trois droites en soient les médianes ?
Quelles remarques faites-vous ?

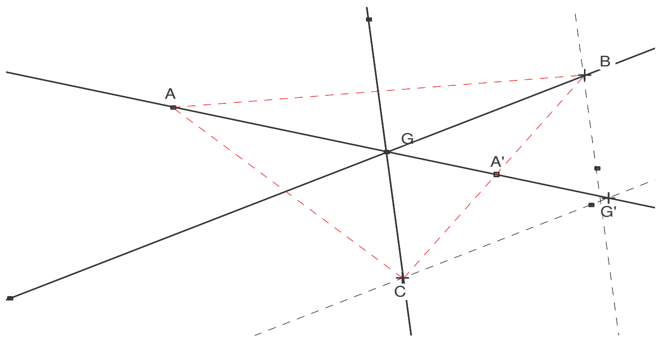
Autre énoncé facultatif :

Soit un cercle C de diamètre [AB], M un point intérieur au cercle C. Construire à la règle (non graduée), seulement la perpendiculaire à la droite (AB) passant par M.

Eléments de solution :

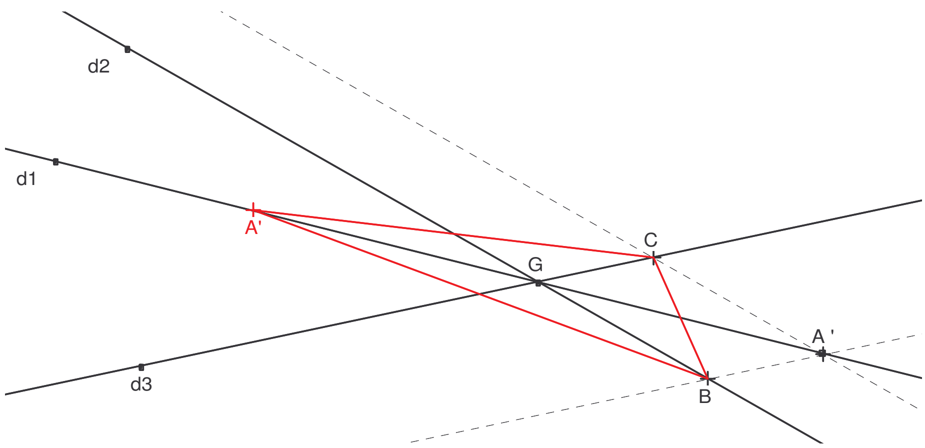
Méthode (💣)

1) construire A et A'
2) construire G' image de G par le symétrie de centre A'
3) construire le parallélogramme BG'CG



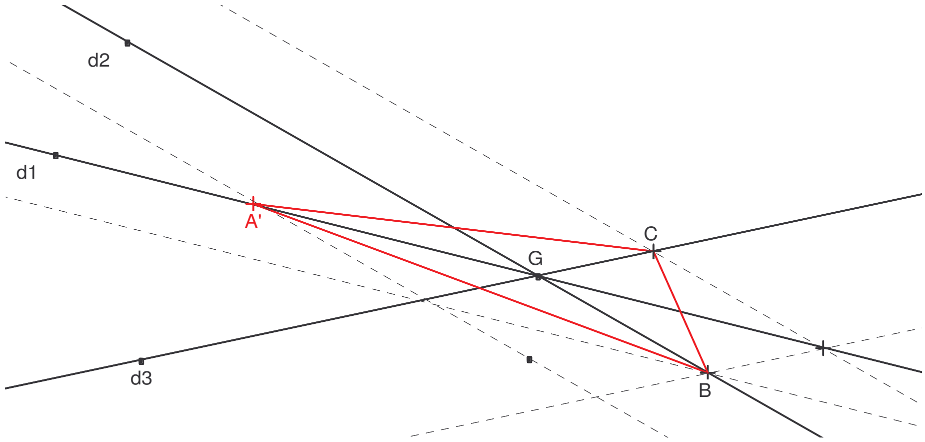
Méthode (☸)

$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{O}$ donc $\vec{GB}+\vec{GC}=-\vec{GA}$ donc on doit construire un parallélogramme dont les cotés sont [GB] et [GC] et la diagonale sur d_1 donc je fixe A' et je construis un parallélogramme de telle sorte que d_3 et d_2 supportent les cotés



Méthode (✹)

Par A fixé on trace la parallèle à d_2, on note son point d'intersection avec d_3, en ce point on trace la parallèle à d1 on note son point d'intersection avec d_2 B, en ce point on trace la parallèle à d_3 on note son point d'intersection avec d_1, en ce point on trace la parallèle à d_2 on note son point d'intersection avec d_3 ce sera C



Expérience :

Nous avions décidé de deux scénarios communs où l'aide apportée aux élèves était différente suivant les groupes :

Consignes relatives à la recherche du problème proposé.

- La recherche est individuelle pendant toute la durée de la séance.
- Ce travail sera noté sur 5 points par exemple (ce n'est pas un contrôle !), chaque initiative, chaque démarche sera évaluée.
- Utiliser une copie : mettre votre nom, les explications relatives à votre construction, faire la construction sur une feuille simple à part. L'ensemble sera relevée à la fin de l'heure.

Aides possibles.

Pour cette construction vous pouvez , si vous le souhaitez, disposer de trois aides successives, à venir chercher au bureau du professeur.

Les aides :

Scénario 1 : Chaque aide est sous forme de questions dirigées.

Aide n°1 : Quels points caractérisent un triangle ? Peux-tu en placer un ?

Aide n°2 : Que penses-tu du rôle du point G ?

Aide n°3 : Quelle configuration judicieuse introduire pour placer les points manquant ?

<u>Scénario 2</u> : Inciter la méthode analyse synthèse.

Aide n°1 : Imagine la figure réalisée et aide-toi des propriétés induites par cette figure.

Aide n°2 : Ne t'occupe plus de la construction de tous les sommets du triangle mais cherche, en respectant les consignes, à construire une partie de la figure seulement. (abandon d'une contrainte).

Aide n°3 : Reproduis le procédé des aides 1) et 2) une nouvelle fois pour terminer la figure et vérifie.

Remarques sur le déroulement

Les élèves se mettent tous au travail, semblent parfois déçus que le travail soit exclusivement individuel.

Ils commencent à demander l'aide n° 1 après de 15mn à 30mn et ne demandent pas immédiatement les aides suivantes.

Ils sont perplexes devant les aides « qui ne les aident pas » disent certains !

Certains élèves ne prennent pas en compte la position du centre de gravité sur la médiane, et tentent une recherche du triangle sans dissocier les points... Pour les autres la construction demeure approximative et la demande de justification ne les conduit pas au parallélogramme. La majorité de ceux qui ont réussi ont employé la méthode (💣) Un ou deux initient les deux autres « méthodes »

Dans une classe on remarquera que le prof disait :

- J'ai relevé comme critères de réussite ceux qui avaient pensé à un tiers deux tiers sur une médiane (38 % scénario 1, 50% scénario 2), puis placer correctement un sommet et le milieu du côté opposé (31% scénario 1 et 25% scénario 2).
- Ceux qui savaient leur cours sur centre de gravité (56 % scénario 1, 44% scénario 2) ! donc une moitié de classe ne connaissait pas bien les propriétés sur au centre de gravité. Ainsi la position de G sur une médiane est mal réussie. 3 élèves ont pensé centre du cercle inscrit. Deux élèves ont pensé au barycentre mais n'ont pas pris les coefficients égaux.
- J'ai relevé aussi ceux qui ont fait la figure réalisée (88% scénario 1 et 50 % scénario 2). Tous n'avaient pas compris au départ que les droites étaient quelconques. Trois élèves ont cependant construit des droites particulières et obtenu pour l'un, un triangle équilatéral et les deux autres des triangles isocèles.
- J'ai relevé ceux qui ont pensé à soulever la deuxième étape de construction : ayant le milieu comment trouver les deux autres sommets (44% pour le scénario 1 et 31 % pour le scénario 2). Enfin deux élèves avec le scénario 1 ont parlé de parallélogramme **une élève a réussi la construction** et aucun n'élève du scénario 2 n'est parvenu à cette étape.
- Après évaluation de ces critères en pourcentage j'ai 29 % de réussite pour le scénario 1 et 22% pour le scénario 2
- A noter trois élèves ont réalisé la construction du problème relatif à l'orthocentre .

Dans une autre classe :

1° Constatation : Aucune idée de ce qu'est une construction correcte !

2° Constatation : Aucune idée de tester leur texte descriptif une fois celui-ci écrit.

3° Constatation : Aucun automatisme réflexe ne les pousse à voir le parallélogramme. Je trouve que cela dénote une faille de l'enseignement de la géomètre antérieure et des capacités d'observation et d'associations d'idées : Rien ne leur saute aux yeux !

Bilan :

- Quel que soit le scénario mis en œuvre, le questionnement posé ne semble pas les faire avancer sur la recherche de justifications.
- La mise en place de ce problème questionne sur la place de l'analyse synthèse dans nos enseignements.
- Dans le travail individuel, les différences de rythme posent problème pour la mise en place d'une intervention efficace sans interrompre les recherches.
- Il semble que le guidage proposé doit clarifier la compétence visée.
- Ils ne sont pas habitués à des problèmes de construction ont mal réussi et se sont moins impliqués que pour les autres problèmes. De plus nous n'avions pas imaginé qu'ils puissent ignorer les propriétés du centre de gravité ! Nous tirons de ces séances un constat d'échec relatif.
- Peut-être les aides fournies n'étaient-elles pas assez explicites ou pertinentes ?
- Il semble nécessaire d'insister sur :
    1) le temps indispensable pour trouver
    2) la disproportion de ce temps nécessaire et de celui de la correction.
- La simplicité d'une solution n'indique pas qu'elle soit simple à trouver d'où le piège pour des élèves qui croient que l'on trouve sans chercher !

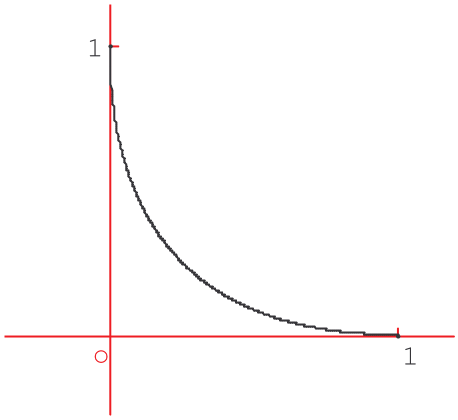
Conclusion :

Cet exercice ne présente pas de grandes possibilités d'application des propriétés du barycentre. Par contre, il semble intéressant à poser quelque temps après avoir traité ce thème avec une classe de 1^{ère}S. En effet, il permet de mesurer ce « qu'il reste » à des élèves, concernant le centre de gravité d'un triangle, vu comme isobarycentre de 3 points (relation $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{O}$ et son exploitation).

Annexe 4 : Problème n°4 posé en 1èreS

en module, en 2003 – 2004 puis en 2004 – 2005

Enoncé (***Il est extrait du livret accompagnement des programmes p 9 n° 4 de terminale S)***



Soit f une fonction définie pour tout x de [0 ; 1] par :

$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ **.**

On admettra que (C) est tangente aux deux axes de coordonnées aux points de coordonnées (1 ; 0) et (0 ; 1).

(C) est-elle un arc de cercle ?

Méthodes :

1) Raisonnement par l'absurde. Si (C) est un arc de cercle alors le centre est I(1,1), le rayon est 1 et par exemple le point A $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ est un point de (C) tel que AI $\neq 1$.

2) Soit M un point quelconque de (C), l'équation $IM^2 = 1$ admet deux solutions (x = 0 et x= 1).

3) En TS, aire sous la courbe différente de celle du carré moins celle du quart de disque.

Différents déroulements des séances :

1)

Etape 1 :

- Recherche **individuelle** pendant 20 mn à 25 mn environ sans **aucune** intervention du professeur.
- Laissez par écrit, sur une copie où vous mettrez votre nom, toutes les traces de votre recherche (pas d'effaceur, pas de gomme, barrez si erreur) en expliquant votre démarche.
- Lorsque vous avez choisi une piste, essayez de la mener à son terme. Si vous l'abandonnez, n'effacez rien, tirez un trait et indiquez votre nouvelle direction de recherche

Etape 2 :

- Puis, **regroupez-vous par 4**
- Mettez en commun vos recherches, débattez entre vous pour valider les unes et rejeter les autres.
- Vous pouvez questionner le professeur (soit pour vous aider dans votre questionnement soit pour valider votre formule) Vous devrez alors formuler votre question **par écrit** et noter **par écrit** la réponse du professeur.

2) Deux groupes, même procédure dans les deux groupes

1) distribution de la feuille « questionnaire d'aide », temps de lecture rapide et objectifs APPRENDRE A SE POSER DES QUESTIONS
2) Consignes : rendre tout ce que l'on a écrit et écrire toutes les pistes de recherche imaginées, la prise d'initiative est attendue.
3) Distribution du sujet. Dans chaque groupe j'ai insisté à nouveau aux 2/3 de la recherche sur la nécessité de laisser trace de toutes les recherches

Observations :

Pour une classe **:**

1) les élèves cherchent en fonction du cours du moment. L'an dernier sur le même sujet 24 élèves sur 35 avaient entrepris de calculer des calculs de dérivées ou de sens de variation (chapitre du moment), cette année ils tentent de résoudre l'équation $x-\sqrt{x}+1=0$ et de faire des changements de variable (6/35), (on termine le chapitre sur le second degré et on a vu les axes de symétrie !). La géométrie est moins prégnante, même si, cette année une fiche sur les lieux de points connus à été faite. La définition du cercle est toujours aussi peu présente même si elle a été redonnée à l'occasion de l'étude des lieux (8/35).

2) Rares sont les élèves qui mettent clairement en évidence l'objectif (3/35)

3) 8 font une conjecture exacte, 7 ne font pas de conjecture, une conjecture fausse est très gênante (un élève croit qu'il a fait ses calculs faux !)

4) la consultation de documents autorisée et le travail fait sur les équations de courbes à propos des lieux de points conduisent à l'idée d'essayer d'utiliser l'équation du cercle (5/35).

Pour une autre classe **:**

L'idée du centre n'est pas naturel , peu font des calculs de distance d'autres n'y pensent pas ou ne connaissent pas la formule.

Très peu d'élèves parlent de l'axe de symétrie y = x.

Environ 30% arrive à la conclusion justifié ce n'est pas un cercle.

Bilan :

Si on considère le pourcentage de réussite, c'est peu et ce n'est pas encourageant.

Si on considère l'implication des élèves , les questions que se posent certains d'entre eux, les réponses apportées par des élèves pas toujours en situation de réussite sur des exercices plus classiques, c'est intéressant et motivant pour les élèves et l'enseignant.

Pratiquement aucun élève reste devant une feuille blanche. La lutte contre le discours « je ne sais pas donc je ne fais rien » est en bonne voie.

Le temps que l'on peut accorder à ce type d'exercice manque, comme toujours !

Les problèmes rencontrés :

Les élèves ont des problèmes de cours, ils ne connaissent pas la définition du cercle (ensemble des points qui…On peut éventuellement en profiter pour faire une introduction aux ensembles de points). Ce problème nous conduit à la révision des calculs de distance (géométrie analytique, formule), l'équation d'une courbe…

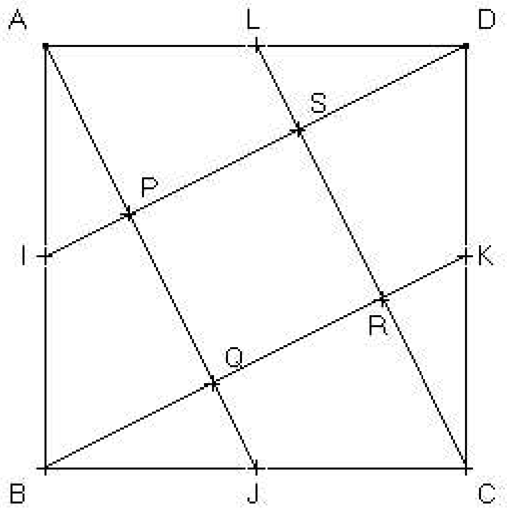
Conclusion :

- **Ce problème pose les questions de raisonnement suivantes :**
    - **la condition nécessaire est-elle suffisante ?**
    - **qu'est-ce que la contraposée ?**
    - **recherche d'un contre-exemple.**

  C'est un bon problème pour mettre en application les méthodes de raisonnement.
- **Il permet de montrer l'utilité de revenir aux définitions (ici le cercle)**
- **Il permet de mettre en évidence l'importance de la mise en place d'un objectif avant de se lancer dans les calculs.**

Annexe 5 : Problème n°5 posé en 1èreS en 2003

Soit ABCD un carré de sens direct. On note I, J, K et L les milieux des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].
Le segment [AJ] coupe [DI] en P et [BK] en Q. Le segment [CL] coupe [BK] en R et [DI] en S.
Démontrer que PQRS est un carré .



Pour résoudre le problème suivre les étapes suivantes :

1. Lisez le texte et prenez le temps de la réflexion.
2. **Un questionnement méthodologique est joint en annexe à ce problème**.*(page 34)* Son but est de vous aider dans votre recherche si cela s'avère nécessaire. Répondez aux questions des deux premières colonnes, suivant l'ordre que vous voulez, en laissant de côté les questions qui ne vous semblent pas pertinentes.
3. Lancez-vous alors dans la recherche du problème.
4. Revenez au questionnaire et répondez aux questions de la dernière colonne.
5. Si vous avez trouvé une solution, cherchez une autre méthode.

Bilan :

<u>Méthodes utilisées :</u>

Pour le parallélisme : *parallélogramm*e.

Pour l'orthogonalité : *produit scalaire* par 9 élèves dont 4 analytiquement. Les angles avec les *triangles isométriques* par 5 et un élève a utilisé la *trigonométrie* (tangentes d'angles égale pour avoir l'égalité d'angles). Une fois *rotation*. Pour les côtés de même longueurs : *analytique* par un élève, la *trigonométrie* par 2. sinon des essais non aboutis avec le *théorème des milieux.*

Il est étonnant de constater que 8 élèves n'ont pas abordé la notion de *côtés de même longueur* et pourtant parmi eux 4 déclarent dans le questionnaire avoir abouti.

Un élève a résolu ce problème avec seulement la méthode analytique, un autre avec triangles isométriques et trigonométrie.

Conclusion :

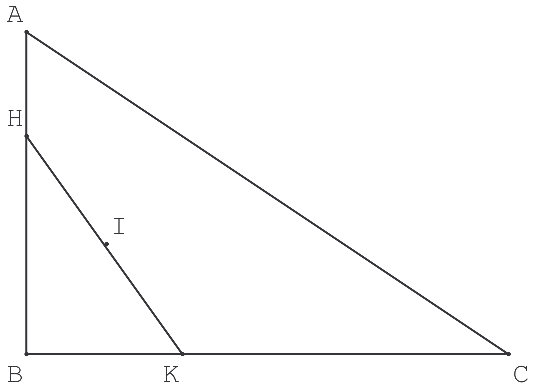
Exercice <u>tout à fait intéressant</u> car permettant de multiples « entrées » dont certaines sont accessibles dès la 2nde. Il peut être proposé, indépendamment de toute progression, à tout moment en 1èreS mais peut-être est-il particulièrement judicieux en fin d'année, en tant que bilan. Dans cet état d'esprit, il peut être intéressant de le faire non seulement résoudre mais aussi d'en déterminer plusieurs (toutes ?) méthodes de résolution.

Annexe 6 : Problème n°6

Posé en $1^{ère}$S et T^{le}S, en module, en 2004 – 2005

Extrait d'un document de travail de Jean-Pierre RICHETON

On considère un triangle ABC rectangle en B tel que 2BC = 3AB.
Un point H et un point K sont mobiles respectivement sur le segment [AB] et sur le segment [BC] de telle façon que 2BK = 3AH.
On note I le milieu (mobile) du segment [HK].



2) Quel est l'ensemble décrit par le point I quand H décrit le segment [AB] ? justifier.
3) Le problème serait-il différent si le triangle ABC n'était pas rectangle ?

Méthodes :
(Correction en fin de document)

Différents déroulements des séances :

1) ***Etape 1 :***
Recherche **individuelle** pendant 20 mn à 25 mn environ sans **aucune** intervention du professeur.
Etape 2 :
Puis, **regroupez-vous par 4**

2) Laisser la recherche se dérouler librement, observer et intervenir si nécessaire.
La recherche reste individuelle.

Exemples de constatations :

1) Les élèves se lancent dans la recherche, cependant une difficulté est induite par l'indication partielle : H décrit [AB]. Un certain nombre d'élèves fixe alors K.
2) Des conjectures, quelques fois intuitives, quelquefois fausses sont émises. On doit cependant intervenir pour les inciter à étudier des positions particulières de H et K, en les renvoyant aux premières consignes de notre questionnaire. (avez-vous étudié des cas particuliers ?).
3) Les directions de recherche sont variées et judicieuses, relativement aux méthodes envisagées. Quelques élèves utilisent le théorème de Pythagore ou des propriétés du triangle rectangle, la deuxième question permet à certains de remettre en question ces outils.

4) Dans une classe, à la fin de la séance, deux groupes ont abouti et on leur demande de rédiger par groupe ou individuellement une solution au problème.

5) Dans une classe, un tiers des élèves transforme l'égalité 2BC=3AB en égalité vectorielle.

6) A la maison, les démarches se sont centrées sur l'utilisation d'un repère, environ 60% (ce qui ne traduit pas les initiatives ouvertes en classe).
Une démonstration correcte est proposée par 25% des élèves dans ce cadre.

Bilan :

En TS, ce problème était loin de leur préoccupation et de leurs connaissances. Il faut bien constater que beaucoup de nos élèves n'ont pas la pratique de la résolution des problèmes de lieux, il est vrai qu'en 1$^{\text{ère}}$ S le temps manque. De plus la notion d'homothétie n'est pas suffisamment acquise pour être mobilisable dans un problème.
En conséquence, il faut faire **beaucoup trop d'interventions** dans les groupes.
En 1$^{\text{ère}}$S, la recherche de lieux de points ne leur était pas inconnue. Il apparaît néanmoins que le barycentre l'emporte, dans la classe où le chapitre barycentre se terminait, bien que la maturité des apprentissages ne semble pas suffisante pour répondre au problème.

Les problèmes rencontrés :

- Pour les méthodes analytiques et barycentriques, la difficulté réside dans l'expression du lien entre la position de H sur [AB] et celle de K sur [BC] ; quasi infranchissable pour les élèves qui ne faisaient varier que H.
- Pour ceux qui ont pensé au théorème de Thalès, la construction du symétrique de H par rapport au milieu de [AB] doit être initiée.
- Pour ceux qui ont pensé à l'utilisation d'une homothétie, il semble nécessaire de les inciter à envisager l'homothétique de I.
- Pour ceux qui ont pensé aux barycentres, il semble nécessaire de les inciter à envisager des coefficients variables.
- Ceux qui, en terminale, ont voulu employer les nombres complexes n'ont pas su comment faire pour caractériser les points d'une droite.

Conclusion :

- **Ce problème permet de montrer l'intérêt d'une conjecture pour préciser un questionnement.**
- **Il permet de montrer l'intérêt de traduire une relation de dépendance entre deux grandeurs.**
- **Il peut permettre d'activer un changement de cadre.**
- **Il permet d'introduire ou de vérifier l'efficacité des méthodes utilisant un repère ou de l'homothétie.**

Correction lieu de points.

Dans toutes les solutions, on désigne par E le milieu de [AB] et F le milieu de [BC]
Rappel : 2BK = 3 AH et 2BC = 3AB

Méthode analytique .

On se place dans le repère $(B, \vec{BC}, \vec{BA})$. Soit x l'abscisse K dans ce repère, d'où $\vec{BK} = x\ \vec{BC}$ avec $x \in [0\ ;\ 1]$.

Alors si on pose $\vec{AH} = y\ \vec{AB}$ avec $y \in [\ 0\ ;\ 1\ ]$ on a AH = y AB d'où $y = \frac{AH}{AB} = \frac{BK}{BC} = x$ (d'après les égalités de l'énoncé)

.D'où $\vec{AH} = x\ \vec{AB}$. Donc $\vec{BH} = x\ \vec{AB} + \vec{BA} = (1-x)\ \vec{BA}$

Bilan K (x , 0) et H (0 , 1−x). Donc I ($\frac{x}{2}, \frac{1-x}{2}$)

I décrit donc le segment de droite d'équation $Y = \frac{1}{2} - X$ avec $X \in [\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\ ]$. Il s'agit du segment [EF]

Méthode géométrique.

1ère méthode ; utilisation d'une homothétie

- On construit le point J tel que HBKJ soit un rectangle.

Alors $\tan \widehat{JAH} = \frac{HJ}{AH} = \frac{BK}{AH} = \frac{3}{2}$ et $\tan \widehat{CAB} = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{2}$. Comme H est un point de [AB], J est un point de [AC].

I est l'image de J par l'homothétie h de centre B, de rapport $\frac{1}{2}$. Quand H décrit [AB], J décrit [AC] et I décrit h ([AC]) = [EF].

- Ou bien on définit J comme l'intersection de [AC] et de la parallèle à (BC) passant par H. Du théorème de Thalès on déduit que $\frac{AH}{AB} = \frac{HJ}{BC}$ or $\frac{AH}{AB} = \frac{BK}{BC}$ donc BK = HJ et le quadrilatère BKJH est alors un rectangle.

Donc I est le milieu de [BJ], même conclusion……

2ème méthode ; Thalès !!

Soit H' le symétrique de H par rapport à E. Alors AH = BH'

On a $\frac{BK}{BC} = \frac{AH}{AB} = \frac{BH'}{BA}$ avec $K \in [\ BC\ ]$ et $H' \in [\ BA\ ]$ donc d'après la réciproque de Thalès , (KH') // (AC).

Or I milieu de [HK] et E milieu de [HH'] donc (KH') // (IE) .

Bilan : (EI) // (AC) et $I \in [\ EF\ ]$. Le lieu cherché est donc inclus dans [EF]

Réciproque : Soit I un point de [EF]. Soit J le point d'intersection de (BI) et (AC), H et K les projetés orthogonaux de J sur [AB] et [BC]. Alors BKJI est un rectangle avec I milieu de [BJ] donc I milieu de [HK] ;

De plus d'après une conséquence de Thalès , comme (HJ) // (BC), on peut écrire $\frac{HJ}{BC} = \frac{BK}{BC} = \frac{AH}{AB}$ d'où $\frac{AH}{BK} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ et donc 2 BK = 3 AH.

Bilan : le lieu cherché est [EF].

3ème méthode : utilisation des barycentres

On pose $\vec{BK} = x\ \vec{BC}$ avec $x \in [0\ ;\ 1]$. Alors (cf méthode 1) $\vec{BH} = (1-x)\ \vec{BA}$.

I barycentre de (K, 1) et (H , 1). Or K barycentre de (C, x) et (B, 1−x) et H barycentre de (B, x) et (A, 1−x) .

Donc I barycentre de (C, x) , (B, 1−x), (B, x), (A, 1−x) soit de (E , 2 (1−x)) et (F, 2 x)

Donc $\vec{EI} = x\ \vec{EF}$ avec $x \in [0\ ;\ 1]$. Donc I décrit [EF].

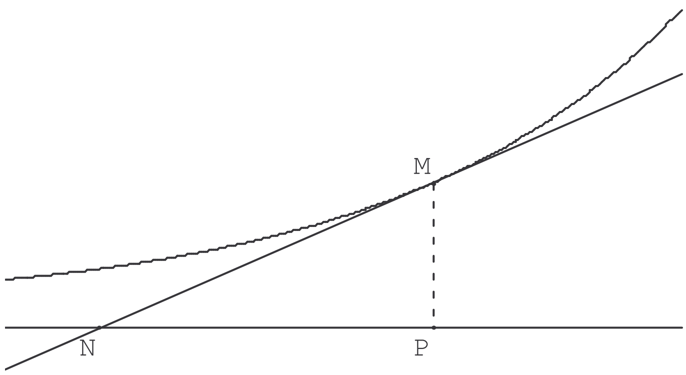
Annexe 7 : Problème n°7

Posé dans trois classes de T[le]S , en module, en novembre 2004

L'idée de ce problème est extrait du livret accompagnement des programmes de terminale Sp 7 n° 2.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{i}, \vec{j}$) .

On note *C* la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur P telle que pour tout x réel, $f'(x) \neq 0$



Pour tout point M d'abscisse x appartenant à *C* , on considère P le point de coordonnées (x , 0) et N le point d'intersection de la tangente en M à la courbe *C* et de l'axe des abscisses.

Soit k un réel . Déterminer les fonctions f pour lesquelles pour tout point de la courbe *C* le vecteur $\overrightarrow{PN} = k\vec{i}$ **.**

Remarque **: Le vecteur** $\overrightarrow{PN}$ **s'appelle le vecteur sous-tangent à la courbe *C*.**

Questions complémentaires **:**

1) **Que peut-on dire dans ce cas de la distance PN ?**
2) **Quelle est la valeur de k pour la fonction exponentielle ?**

Méthode :

Une seule méthode de résolution. Détermination de l'équation de la tangente en M : $Y = f'(x)(X - x) + f(x)$.

Recherche des coordonnées de N et P, puis traduction en termes de coordonnées de l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{PN} = k\vec{i}$.

On obtient alors : pour tout x réel , $-\dfrac{f(x)}{f'(x)} = k$, d'où l'équation différentielle à résoudre $f' = -\dfrac{1}{k} f$, et donc des fonctions définies sur P du type : $x \to Ce^{-\frac{1}{k}x}$, où C est une constante réelle.

Déroulement de la séance :

Consignes communes données aux élèves des trois classes :

- La recherche est **individuelle** pendant toute la durée de la séance.
- Laissez par écrit, **sur une copie** où vous mettrez votre nom, toutes les traces de votre recherche (pas d'effaceur, pas de gomme, barrez si erreur) en expliquant votre démarche.
- Lorsque vous avez choisi une piste, essayez de la mener à son terme. Si vous l'abandonnez, n'effacez rien, tirez un trait et indiquez votre nouvelle direction de recherche
- **Lors de chaque intervention du professeur**, tirez un trait, notez l'information donnée et poursuivez votre recherche.
- **Un questionnement méthodologique est joint en annexe à ce problème**. Son but est de vous aider pendant votre recherche si cela s'avère nécessaire, complétez -le (si vous le souhaitez !!) tout au long de votre recherche

Quelques exemples d'intervention du professeur :

- *A propos de l'équation de la tangente.*

Dans une des trois classes, au bout de d'un quart d'heure environ 8 élèves sur 31 ont pensé à l'écrire l'équation de la tangente. Dans les autres classes ils sont bloqués par l'écriture de l'équation de cette tangente. Un professeur a alors rappelé son équation en demandant d'être vigilant sur le rôle des valeurs littérales et un autre a donné l'équation : $Y = f'(x)(X - x) + f(x)$.

- *A propos de la droite (PN) :*

« avez-vous repéré qui est la droite (PN) ? » (ils ne pensent pas à se diriger vers la recherche des coordonnées des points) « où sont situés P et N par définition ? »

- *Puis intervention dans deux classes à propos de l'égalité vectorielle* $\overrightarrow{PN} = k\vec{i}$.

« k est un réel donné, de quoi avez-vous besoin pour traduire que $\overrightarrow{PN} = k\vec{i}$ ».

- *Et enfin dernier type d'intervention dans une seule classe à propos de l'objectif.*

Pour le premier groupe de module :
« à quelle partie du cours la question posée : « déterminer <u>les</u> fonctions ….. » vous fait-elle penser ? et par conséquent quel type de traduction du problème pourrait-on chercher ? »
« quelle est la nature de l'inconnu dans ce problème ? Qu'est-ce qu'on cherche ? »

Pour le second groupe de module :
« quelle est la nature de l'inconnu dans ce problème ? Qu'est-ce qu'on cherche ? » puis « à quelle partie du cours la question posée : « déterminer <u>les</u> fonctions ….. » vous fait-elle penser ? et par conséquent quel type de traduction du problème pourrait-on chercher ? »
« le dessin du texte est une illustration, on doit trouver toutes les fonctions possibles »
« quelle est l'information principale à traduire et pour ce faire qu'avez-vous à déterminer ? »

Bilan des copies :

- Dans une classe de 31 élèves : Il y a des essais sur toutes les copies mais seulement 6 écrivent une équation de tangente, 2 déterminent l'abscisse de N et un seul écrit l'équation différentielle et en reste là.
- Dans une autre classe de 34 élèves : la recherche n'est pas cohérente pour 4 élèves, 11 élèves ont fait des tentatives sans vraiment rien écrire d'utile.10 élèves ont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{PN}$ en fonction de x, 7 écrivent $x_N - x_P = k$, parmi eux 4 ont écrit l'équation différentielle et 3 ont abouti.
- **Sur les trois classes 5 élèves ont abouti.**
- Exemples de tentatives : Ils ont essayé des fonctions au petit bonheur, en ont tiré des constatations, par exemple que la fonction ne pouvait changer de variations, certains

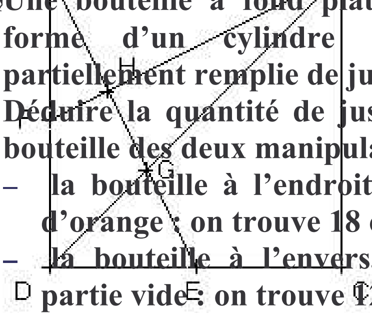
essaient tan(e^x), d'autres écrivent que ce doit être une exponentielle mais sans justifier. Certains essaient de calculer PN et s'arrêtent.

Bilan des réponses au questionnaire :

- Pour une classe, il est complété par deux tiers, pour une autre par un tiers, et pour la dernière très peu complété.
- En général, ils repèrent les mots clés (tangentes , courbe, vecteurs).
- Pour la question « avez-vous fait des essais ? des dessins ?», certains disent avoir fait des essais de courbe.
- Dans la partie centrale (cours, méthodes,….) on trouve : dérivabilité, fonction dérivée, équation de tangente, équation différentielle, exponentielle , fonction carré, inverse.
- Pour les autres questions, très peu de réponses. Exemples : celui qui propose tan(e^x), dit avoir caractérisé PN et abouti, une dit avoir abandonné la géométrie vectorielle, une dit avoir étudié 1/x et avoir vu que cette piste n'aboutissait pas, la dernière dit avoir étudié des cas particuliers exponentielle et polynôme et dit avoir abouti dans le cas de l'exponentielle, alors que dans sa copie elle a juste fait un dessin pour l'exponentielle.

Conclusion :

- **Il a soulevé beaucoup plus de difficultés que prévu, lié au rôle des valeurs littérales (nommer x l'abscisse de P a compliqué l'écriture de l'équation de la tangente), lié aussi aux calculs.**
- **Il a mis en évidence des points de cours dont on croit qu'ils sont acquis (équation de la tangente, appartenance d'un point à deux droites, traduction d'une égalité vectorielle….) et de ce point de vue il est intéressant de revenir sur ces notions de base et permet à certains élèves de mieux les assimiler (notion de tangente par exemple).**
- **Les élèves l'ont trouvé très dur parce qu'ils ne voyaient pas du tout le but , l'esprit. L'inconnue est une fonction, c'est un problème nouveau et formateur.**
- **Quant au questionnaire, il nous semble que dans le cas d'intervention du professeur lors de la séance il aide moins que pour un travail solitaire. Les interventions étant plus des injonctions à faire-faire ou à se poser des questions qu'à indiquer des méthodes.**
- **Il a des applications en SVT, une partie de la courbe de croissance de « la caulerpa taxifolia », algue qui se propage dans le milieu marin, admet une sous-tangente constante. (Vu en TPE)**.



Quelle proportion de l'aire de ABCD représente l'aire de FHGD ?

Une bouteille à fond plat de ... de capacité, ayant la forme d'un cylindre surmonté d'un goulot, est partiellement remplie de jus d'orange.

Déduire la quantité de jus d'orange qui reste dans cette bouteille des deux manipulations suivantes

– la bouteille à l'endroit, on mesure la hauteur de jus d'orange : on trouve 18 cm.
– la bouteille à l'envers, on mesure la hauteur de la partie vide : on trouve 12 cm.

Commentaires :
C'est une situation qui semble impossible aux élèves. Cet exercice est indépendant de toute progression, il s'agit d'une mise en équation assez simple.

Exemples 203 en Seconde et Première :

EVAPM (2)

Un nombre entier est un carré parfait s'il est égal au carré d'un nombre entier. Exemple : 1764 est un carré parfait car $1764 = 42^2$.

Est-il vrai que les carrés parfaits qui se terminent par 6, c'est-à-dire dont le chiffre des unités est 6, sont les seuls à avoir un chiffre des dizaines impair ?

Exemples 204 en Seconde et Première :

EVAPM (3)

Deux nombres ont pour somme 456.

De combien augmente leur produit si on ajoute 7 à chacun des deux ?

Exemples 205 en Seconde et Première :

EVAPM (4)

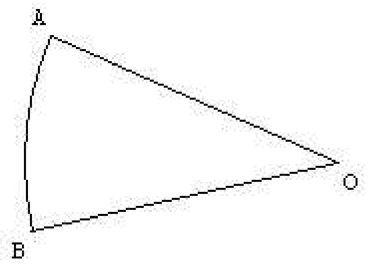
Parmi tous les triangles rectangles dont l'hypoténuse mesure 10 cm, déterminez celui qui a la plus grande aire.

Exemple 101 en Première S:

Sur une plage rectiligne, en bord de mer, un maître-nageur dispose d'une corde de 80 m de longueur et de deux bouées A et B pour délimiter un *rectangle* de baignade surveillée . Il n'utilise bien sûr pas la corde sur le rivage…
A quelle distance du rivage doit-il placer les bouées A et B pour que le rectangle ait une aire maximale ?

- Problème intéressant, l'énoncé est simple et court . La difficulté pour les élèves est de passer de deux inconnues à une seule en introduisant une fonction. Il est important de prendre du temps pour les laisser se confronter à ce problème qu'ils rencontreront souvent par la suite.
- Il peut être donné en septembre comme introduction du second degré ou un peu plus tard pour manipuler le second degré :

Exemple 102 en Première S :



On rappelle les deux résultats suivants :

A et B étant deux points d'un cercle de centre le point O et de rayon r,

- **La longueur de l'arc de cercle AB est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre** $\widehat{AOB}$ **associé à cet arc.**
- **L'aire du secteur circulaire OAB est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre** $\widehat{AOB}$ **associé à l'arc AB.**

On considère les secteurs circulaires (n'ayant pas la forme d'un disque) de rayon x et d'angle au centre de mesure α **(exprimée en radians).**

1) **Leur aire $\mathcal{A}$ étant <u>fixée</u>, montrer que la valeur α de l'angle au centre pour laquelle le périmètre est minimum est indépendante de cette valeur fixée $\mathcal{A}$.**
2) **Leur périmètre L étant <u>fixé</u>, montrer que la valeur α de l'angle au centre pour laquelle l'aire est maximale est indépendante de cette valeur fixée L.**

- Il peut être donné en première ou en terminale (voir pb T03), c'est un problème d'optimisation avec des angles qui permet de remettre en fonctionnement la longueur d'un arc.

Exemple 103 en Première S :

ABCD est un rectangle tel que AB=1 et BD=2.
M est un point de [AB) n'appartenant pas à [AB] ; les droites (MC) et (AD) sont sécantes en N.

Existe-t-il une position du point M pour laquelle la somme des aires des triangles MBC et NDC est minimale ?

- 1ère séance de l'année en demi-groupe.
- Objectif : Mettre en exergue différentes étapes de l'activité mathématique.

Exemple 104 en Première S :

Dans un cylindre de diamètre 16 cm et de hauteur 25 cm ; on place une bille de rayon 7 cm et on complète avec de l'eau jusqu'à affleurement. On retire la bille, on plonge une bille de rayon quelconque ; la bille sort-elle de l'eau ? est-elle sous l'eau ? Y-a-t-il affleurement ?

Classe entière en fin de séquence sur le second degré.

Objectif : Factoriser un polynôme de degré supérieur à 2.

Deux approches :

- Calculer le volume d'eau nécessaire pour affleurement d'une bille de rayon R et de la bille de rayon 7. Comparer ensuite ces volumes.
- Calculer la hauteur d'eau dans le cylindre après avoir « liquéfié » la bille de rayon R et rajouter l'eau de la situation initiale. Comparer ensuite à 2R.

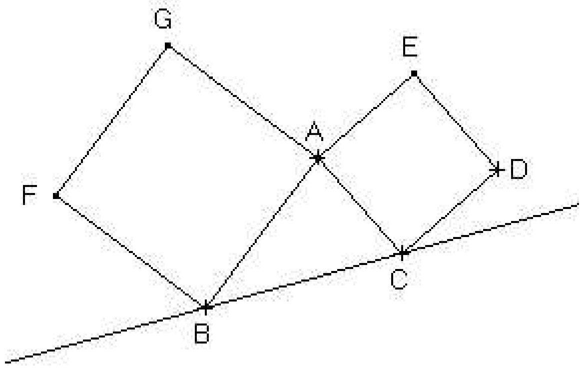
Exemple 105 en Première S :

Olympiades 1ère 2002

Des fourmis se déplacent, en ligne droite, à la queue leu-leu, à vitesse constante, en formant une colonne de 50 cm de long.
La dernière fourmi du groupe décide d'aller ravitailler la fourmi chef et pour cela rejoint la tête de la colonne puis sa mission étant accomplie, retourne aussitôt à la queue de la colonne. Sachant que, pendant cet aller-retour, la vitesse de cette fourmi est restée constante et que la colonne a parcouru 50 cm, quelle est la distance parcourue par la fourmi ravitailleuse ?

- Problème de mise en équation, qui utilise le second degré mais peut aussi se ramener à la résolution de $x^2 = a$, avec $a > 0$.
- C'est un problème qui mobilise bien les élèves et qui les marque.
- La mise en système est inhabituelle, on a six inconnues (deux pour le temps, deux pour la vitesse et deux pour la distance) et quatre équations. Il s'agit ensuite de penser à former le quotient des équations deux à deux pour se ramener à deux équations.
- Il a donc le double intérêt d'un problème de recherche et d'un problème qui nécessite des capacités de calcul.

Exemple 106 en Première S :

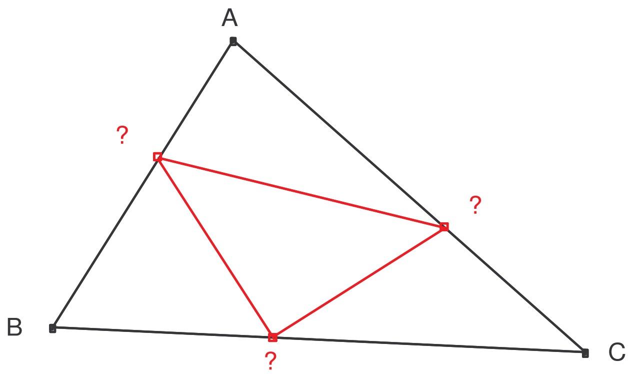


ACDE et BAGF sont des carrés
Montrer que la médiane de ABC issue de A est une hauteur de AEG

Exercice a traiter avec le produit scalaire quand les bases de cette notion semblent acquises.

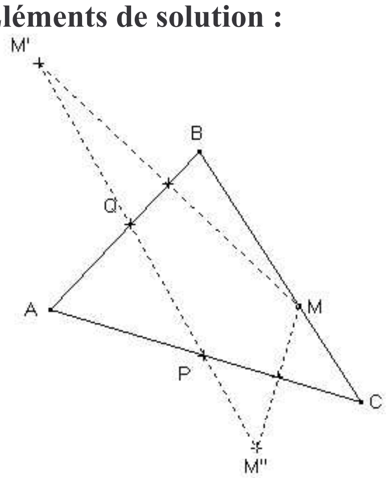
Exemple 107 en Première S :

Olympiades 1ère - PARIS 2002



Soit ABC un triangle quelconque, à angles aigus, un coureur doit partir d'un point de [BC] vers un point [AC] puis vers un de [AB] et revenir au point de départ. Comment placer ces points pour avoir le trajet le plus court ?

Eléments de solution :



Soit M un point de [BC], M' le symétrique de M par rapport à (AB), M'' le symétrique de M par rapport à (AC), P et Q les intersections de (M'M'') avec (AB) et (AC)

MP + PQ + QM = M''P + PQ + QM' et ce trajet est minimal quand M', M'', P et Q sont alignés

Le triangle M'AM'' est isocèle et l'angle M'AM'' est fixe et vaut 2BAC donc tous les triangles M'AM'' sont semblables et M'M'' sera minimal quand AM' = AM'' = AM est minimal, donc quand M est le pied de la hauteur issue de A.

De même pour P et Q.

Cet exercice est difficile mais le raisonnement est « riche ».

Exemple 108 en Première S :

Olympiades 1ère - TOULOUSE 2004

EXERCICE 3 : le pli optimal

Soit $ABCD$ une feuille de papier rectangulaire de largeur $AB = 4$ et de longueur $BC = 6$. Soit R un point de $[AB]$ (bord inférieur de la feuille) et T un point de $[AD]$ (bord droit de la feuille).

On replie la feuille suivant le segment $[RT]$ et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille). Voir figure ci-contre.

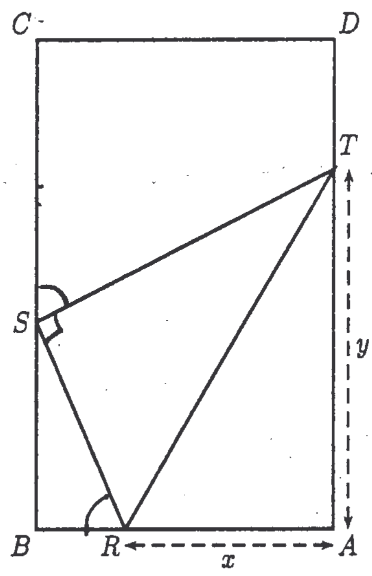
Dans tout l'exercice, on s'intéresse au cas où S est sur le segment $[BC]$ (bord gauche de la feuille).

On pose $AR = x$ et $AT = y$.

1) Trouver les valeurs minimale et maximale de x.

2) Trouver une relation entre x et y lorsque S se déplace sur $[BC]$.

3) Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie repliée (triangle SRT) est minimale. Quelle est alors la nature du triangle AST ?



Exemple 109 en Première S :

Pour un enseignement problématisé des Mathématiques au lycée - APMEP

Un tonneau contient 228 litres de vin de Gaillac, Madame Sévère a interdit à son mari d'y toucher. Discrètement, Monsieur Sévère prélève, chaque jour, un litre de ce tonneau qu'il remplace par un litre d'eau. A partir de quel jour boit-il plus d'eau que de vin ?

Intéressant à donner car il semble que les élèves ne l'associent que très difficilement au registre des suites. Il peut être proposé dans le cadre d'une recherche en classe au début de l'année avec l'idée d'accompagner la recherche des élèves en « fermant » un peu, au « bon » moment !

Exemple 110 en Première S :

La somme de deux nombres est 20, trouver ces deux nombres de façon que le produit du carré de l'un par le cube de l'autre soit maximal.

C'est un exercice d'optimisation, l'intérêt est que les nombres doivent être entiers.

Exemple 111 en Première S :

Problème pris sur le site du lycée St Sernin en 2003-2004

Une lampe entourée d'un abat-jour est suspendue entre deux murs distants de 8 mètres à une rampe. La situation est représentée par le schéma ci-dessous.

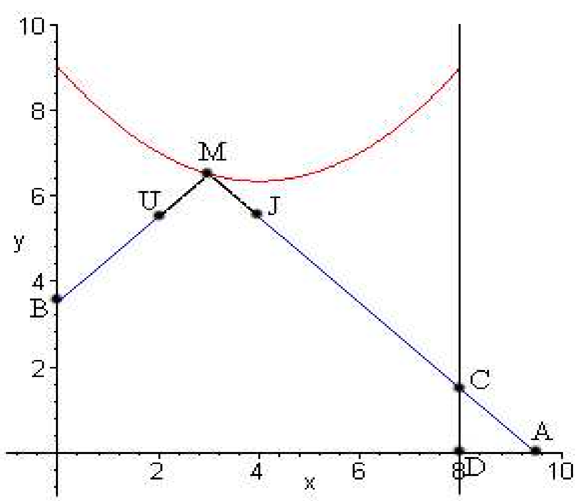
Les murs ont pour équations x = 0 , x = 8 et la rampe a pour équation: $y = \frac{1}{6}(x-4)^2 + \frac{19}{3}$ **.**

L'abat-jour est symbolisé par un triangle rectangle isocèle UMJ de côtés 1 et $\sqrt{2}$ **.**

On note x l'abscisse du point M.

1) Vérifier que les bords de l'abat-jour ne touchent ni la rampe ni les murs lorsque $1 \leq x \leq 7$**.**

2) Pour quelle valeur de x dans [1 ; 7] l'aire du polygone éclairé est-elle maximale ?



- Problème pas facile, posé en devoir maison en décembre
- Intéressant car il demande de bien interpréter l'énoncé pour définir l'ensemble de définition, d'avoir compris la notion de coefficient directeur de la tangente à la courbe et de savoir traduire l'appartenance d'un point à une courbe pour la mise en fonction.

Exemple 112 en Première S :

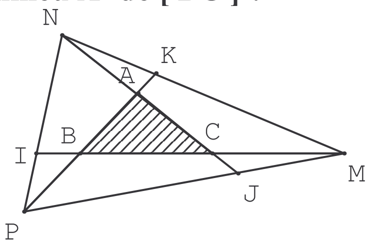
Problème inspiré d'un exercice du Terracher de 1ère S (p 41 n° 92)

<u>Résultat préliminaire :</u>

Soit ABC un triangle et K un point du segment] BC [. Démontrer que $\frac{KB}{KC} = \frac{\text{aire}(ABK)}{\text{aire}(ACK)}$ **.**

Que peut-on dire dans le cas particulier où K est situé au milieu A' de [BC] ?

A partir d'un triangle ABC, on construit les points M, N et P tels que A est le milieu de [NC], B est le milieu de [AP] , C celui de [BM].
On obtient alors un triangle MNP .



1) **On note s l'aire du triangle ABC. Quelle fraction de l'aire de MNP représente celle de ABC ? Vous pourrez indiquer sur la figure, en justifiant, des triangles dont l'aire est égale à s.**
2) **Soit J le point d'intersection de (NC) et (PM).**
   En utilisant le résultat préliminaire, préciser la position de J sur [PM] .
   On pourra désigner par x l'aire du triangle CPJ et par y l'aire du triangle CJM
3) **On veut retrouver le résultat du 2) en utilisant les propriétés du barycentre. Démontrer que A est le barycentre des points N, P et M affectés de coefficients à déterminer. Retrouver alors le résultat du 2).**
   Si I est le point d'intersection de (MB) et (PN) et K le point d'intersection de (PA) et (NM) , préciser de même la position de I sur [PN] et celle de K sur [NM] .
4) **Application : On a construit le triangle MNP à partir du triangle ABC. Utiliser ce qui précède pour construire le triangle ABC à partir du triangle NPM .**

- Problème posé en devoir maison en janvier 2004
- Les deux méthodes utilisées sont riches et l'application est l'occasion d'aborder les problèmes de construction .

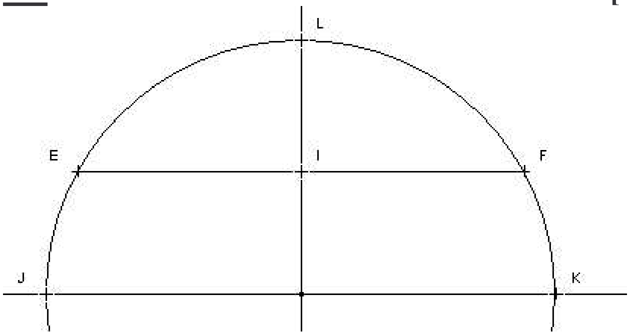
Exemple T01 en Terminale S :

Étant donné trois entiers consécutifs, est-il possible que le cube du plus grand soit la somme des cubes des deux autres ?

Pour appliquer le théorème de la bijection.

Exemple T02 en Terminale S :

Existe-t-il une position pour I pour que l'aire du secteur JEFK soit égale à l'aire de EIFL ?
<u>NB</u> : JELFK est un demi cercle de diamètre [JK] et (EF) est parallèle à (JK).



Pour appliquer le théorème de la bijection intérêt médiocre car le résultat est un peu trop évident.

Exemple T03 en Terminale S :

EVAPM T/99 – Épreuve T28 - page 3

Dans un pays imaginaire, pour la culture des potirons les terrains doivent tous avoir la forme de secteurs circulaires, mais sans pour autant être des disques.
1° L'un des habitants vient d'obtenir le droit de cultiver des potirons à condition qu'il le fasse sur un terrain de périmètre égal à 100 mètres. Son intérêt étant de le prendre d'aire maximale, comment doit-il choisir le rayon R (en mètres) et la mesure *a* (en radians) de l'angle de son terrain ?
2° Et si on lui impose l'aire de son terrain, par exemple 10 000 m², comment doit-il choisir le rayon (en mètres) et l'angle (en radians) de son terrain pour avoir le minimum de frais de clôture ?
3° Les valeurs de *a* trouvées aux deux questions précédentes sont-elles dues au choix des valeurs fixées du périmètre (100 mètres) et de l'aire (10 000 m²) ou peut-on généraliser ?

Peut « s'ouvrir » encore plus voir 105 numérotation à revoir ???

Exemple T04 en Terminale S :

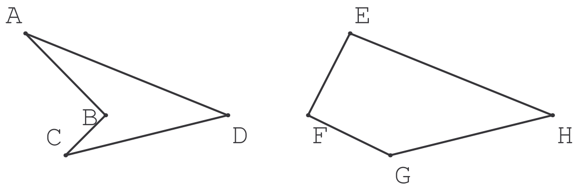
Quels sont les a, b, et c tels que |a| = |b| = |c| = 1 et a + b + c = 0 ?

C'est un problème très intéressant car l'entrée peut être analytique ou géométrique, on peut écrire $a = e^{i\theta}$ ou remarquer que $|a| = |\bar{a}|$ on montrer que A(a), B(b) et C(c) forment un triangle équilatéral de centre O.

Exemple T05 en Terminale S :

Problème inspiré d'un exercice du Math'x TS (p 13)

Un polygone convexe est un polygone dont les sommets sont dans un même demi-plan par rapport à n'importe quelle droite contenant un côté du polygone.
Par exemple, le polygone ABCD est-il convexe ? , le polygone EFGH est-il convexe ?



Dessiner un polygone de 6 côtés qui est convexe et un polygone de 6 côtés qui ne l'est pas.

n est un entier naturel supérieur ou égal à 3. C est un cercle donné.
Sur le cercle C, on dispose n points $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ **de telle sorte que l'on obtienne un polygone convexe** p_n **de n sommets inscrit dans le cercle. On note** d_n **le nombre de diagonales du polygone** p_n.
Déterminer l'expression de d_n **en fonction de n .**

- *Bilan après correction des copies:*

On peut dégager quatre niveaux d'avancement :
- Ceux qui ont fait des études de cas particuliers correctes : 30 élèves.
- Ceux qui ont cherché une relation de récurrence (6 élèves, 4 la trouvent) ou ceux qui ont cherché le nombre de diagonales pour un seul point soit n–3. (4 élèves, deux ont pensé à multiplier par n).
- Ceux qui ont exprimé le nombre de diagonales sous forme d'une somme : $d_n = 2(n-3)+(n-4)+(n-5)+ \ \ldots.. +1$ mais qui n'ont pas simplifié, soit 4 élèves.
- Ceux qui ont trouvé $\frac{n(n-3)}{2}$ soit 4 élèves, un seul à justifier.

- Problème qui intéresse les élèves, qui manipule les suites mais aussi car plusieurs méthodes de résolution sont possibles.

Exemple T06 en Terminale S :
Feuille distribuée en début d'année

Exercice n°1 :

Y a t-il des points M de coordonnées x et y, avec x et y des réels positifs tels que $\frac{x+y}{x^2+y^2+1}$ **soit maximum ?**
Intéressant à cause du changement de registre, c'est à dire le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires.

Exercice n°2 :
Dans une classe de 27 élèves Nicolas a été élu délégué avec 66,7% des voix. Sur la feuille du compte rendu Nicolas a écrit par erreur 77,6%. Sans même savoir le nombre de voix obtenues par Nicolas, son professeur lui fait remarquer qu'il s'est certainement trompé. Comment a-t-il pu s'en apercevoir ?
D'un intérêt médiocre…

Exercice n°3 :

Soit $P_n = \left(1+\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{8}\right)\times\left(1+\frac{1}{15}\right)\times.......\left(1+\frac{1}{(n^2-1)}\right)$**. Démontrer que** $P_n < 2$**, pour tout n** ≥ 2**.**

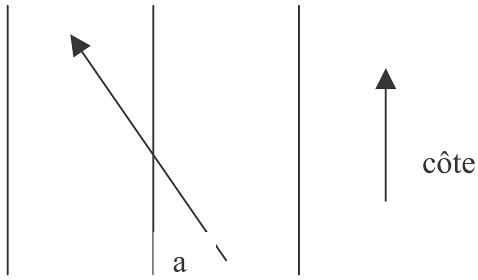
Ne peut pas se faire par récurrence, alors que c'est le raisonnement auquel pense les élèves immédiatement

Exercice n°4 :

Soit n réels strictement positifs x_1, x_2, x_3,… x_n. Démontrer l'inégalité suivante :

$$\frac{x_1}{x_n}+\frac{x_2}{x_{n-1}}+...+\frac{x_n}{x_1}\geq n$$

Exercice n°5 :



Je monte à bicyclette une côte à 8% (élévation de 8mètres pour 100m de plat) sur une route bien droite. Sous quel angle a par rapport à l'axe de la route dois-je choisir ma trajectoire afin de ne plus monter cette côte qu'à 5% ?

Un intérêt de cet exercice est qu'une stratégie de résolution consiste à passer du plan à l'espace. Ce à quoi de nombreux élèves ne pensent pas nécessairement. Il s'agit en fait d'un changement de registre assez inhabituel…

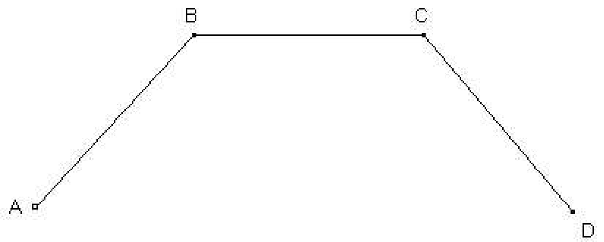
Exemple T07 en Terminale S :

Etudier la convergence de la suite u définie par : $u_n = \overbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...............+\sqrt{2}}}}}^{\text{n radicaux}}$

Ici l'intérêt n'est pas constitué par de multiples entrées mais par :

- Entrée naturelle pour faire une conjecture
- Plans d'étude possibles de la suite, dont l'obtention de la relation de récurrence qui permet de la définir
- Limite dont on peut obtenir la valeur exacte (peu trouvée par les élèves…)
- « Colle » bien au programme de Terminale S (convergence des suites croissantes majorées)

Exemple T08 en Terminale S :



Un paravent est constituée de trois rectangles identiques

Comment doit-on l'ouvrir pour que la surface du trapèze ABCD soit maximale ?

Peut être donné après les dérivées des fonctions composées

Exemple T09 en Terminale S :

Pour un enseignement problématisé des Mathématiques au lycée – APMEP - tome 2 n° 30 p 143

Un chocolatier crée un chocolat en forme de cône de révolution enrobant une cerise. Pour minimiser la quantité de chocolat utilisé, il souhaite que ce cône soit tangent à la cerise (que l'on assimilera à une sphère de diamètre 2 cm).

1) **Faire un schéma en coupe de ce cône et de la sphère, le plan de coupe contenant l'axe de symétrie du cône. Peut-on choisir plusieurs modèles de ce cône ? si oui, en dessiner une autre coupe. Quelles dimensions du cône peut-on faire varier ?**
2) **Déterminer la hauteur et le rayon du disque de base qui minimisera la quantité de chocolat nécessaire.**

Ce problème a été posé en devoir à la maison le 3 septembre à rendre pour le 10 septembre. Ils devaient le faire à deux avec autorisation de me poser des questions.
Je n'ai pas eu de questions. J'ai ramassé 16 copies (sur 29 élèves), deux copies sont arrivées en retard et deux élèves ne l'ont pas rendu.

Bilan :
J'ai évalué ce problème en repérant quelques critères :
1. Figure correcte et repérage des deux variables hauteur et rayon de la base. Deux élèves sont en échecs.
2. Mention des contraintes sur les variables. Seulement 2 copies ont précisé ces contraintes dès le début du devoir.
3. Avoir trouvé le lien entre les deux variables. Oui pour 12 copies.
4. Avoir trouvé la fonction. Oui pour 10 copies.
5. Des maladresses dans les calculs. Oui pour 7 copies.

Au final : 3 très bonnes copies, 2 bonnes copies, 3 assez bonnes, 1 copie correcte, 4 passables et 5 copies où on trouve seulement le critère 1.

Bon problème d'optimisation de début d'année qui permet de retravailler sur les chapitres fonctions vues en 1S.

BIBLIOGRAPHIE

Sources d'exercices :

Les tomes 1 et 2 « Pour un enseignement problématisé des mathématiques au lycée « brochure n° 150 et n° 154 APMEP.

EVAPM

Olympiades académiques de première - 2002

« Démarche scientifique et évaluation », article de Jean-Pierre RICHETON

Autres ouvrages ou articles nous ayant aider dans notre travail/

Un extrait du séminaire de CHEVALLARD pour les PLC2 de l'I.U.F.M. d'AIX-MARSEILLE

« Cours de psychologie » Champs et Théories, auteurs : de R GHIGLIONE et J.F. RICHARD

« Traitement de l'information symbolique » Traité de psychologie cognitive 2 , auteurs :
J.F RICHARD, Claude BONNET et R GHIGLIONE.

« Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique »
(Marianna BOSCH et Yves CHEVALLARD*)*

« Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique », extrait d'un séminaire de didactique des mathématiques à l'IREM d'AIX-MARSEILLE (1990-1991) par Yves CHEVALLARD.