
DOSSIER :

PROBLEME OUVERT

Une autre façon de faire des mathématiques

L'évolution très rapide des connaissances et de la technologie nous amène à former des élèves qui seront confrontés dans leur vie professionnelle à des situations de plus en plus complexes d'une part, et de moins en moins répétitives d'autre part.

La pratique qui consiste à mettre en place chez les élèves des « réflexes conditionnés » qui leur permettent de réagir automatiquement face à une situation donnée ne suffit donc pas. De plus cette pratique cache les difficultés des élèves à modéliser certaines situations. En effet, combien d'élèves, à l'issue du cours sur la résolution des équations du second degré à une inconnue réelle, utilisent-ils le discriminant pour résoudre l'équation « $x^2 - 25 = 0$ » ? Cela prouve une chose: c'est qu'ils s'enferment dans un contrat que nous leur imposons à nos dépens par notre propre pratique et qui les empêchent de réfléchir ; "ils appliquent ce qu'on vient de leur enseigner!".

Pour essayer de palier à cet effet pervers de notre enseignement, quelques professeurs ont expérimenté pour vous une technique qui met les élèves en situation de recherche, et donc de réflexion: « le problème ouvert ». C'est une technique où l'esprit d'initiative prévaut sur le dirigisme dont l'élève est souvent l'objet et où rien n'est rejeté à priori. Elle lui permet de s'exercer à une démarche scientifique qui consiste à faire des essais, conjecturer, tester ses conjectures, prouver ses conjectures.

Qu'est-ce qu'un problème ouvert ?

Comment le cherche-t-on ?

Peut-on l'envisager comme une activité classique ?

Qu'attend-on de sa pratique en classe ?

Comment en fait-on chercher à des élèves ?

Autant de questions auxquelles ces pages vont tenter de vous apporter, sinon des réponses, tout au moins quelques éléments qui vous permettront d'expérimenter vous-même cette technique d'enseignement dans vos classes, et d'en débattre avec vos collègues.

(D'après l'introduction de C. FOGUE (IPP Maths/LT) à la rencontre inter-GRAM 97 à Douala)

Quelques objectifs communs aux problèmes ouverts

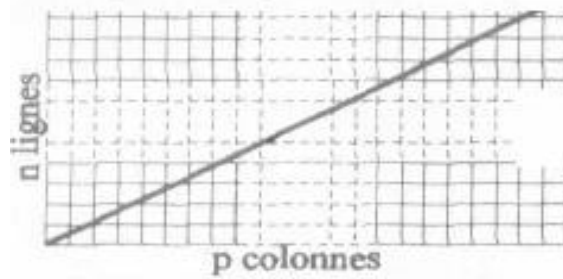
- Travailler en équipe
- Faire des essais
- Emettre des conjectures
- Argumenter, prouver invalider
- Utiliser des connaissances antérieures décontextualisées d'un cours
- Développer la créativité.

Qu'est-ce qu'un problème ouvert?

Exemple:

un professeur est en train de traiter le chapitre: "Projection et repérage", en classe de 4ème. Il propose le problème suivant à ses élèves.

Combien le segment [AB] traverse-t-il de carreaux?



Ce problème est « ouvert », car il satisfait les conditions suivantes:

- 1- Son énoncé est court.
- 2- L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution.
- 3- le problème se trouve dans un domaine conceptuel facilement accessible par les élèves.
- 4- Il est décontextualisé des contenus de cours du moment

Pourquoi ces conditions ?

Un énoncé court, car cela permet à l'élève une première compréhension "instantanée" et lui donne souvent l'impression que c'est facile, que la solution est à sa portée. Cela lui donne donc l'envie de chercher.

Un énoncé qui n'induit ni la méthode, ni la solution, car cela évite une résolution réduite à une simple application. L'élève doit choisir lui-même un cheminement, y renoncer éventuellement pour en prendre un autre, produire une proposition de solution (conjecture). En somme, dans un premier temps, il doit faire preuve d'imagination et de créativité. S'il veut alors résoudre le problème, il va devoir mettre en route une démarche scientifique, c'est-à-dire:

- ↪ Faire des essais pour produire une conjecture.
- ↪ Tester sa conjecture en faisant d'autres essais.
- ↪ Prouver la validité de sa conjecture.

Jamais de questions intermédiaires ni de questions du type "montrer que" qui fermentaient le problème.

Le problème se trouve dans un domaine conceptuel facilement accessible par l'élève. Ainsi peut-il prendre facilement "possession" de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples... Cela permet à tout élève qui s'engage dans la recherche de produire des résultats partiels dans un temps raisonnable et assure que le temps pour réaliser un essai est assez bref, compte tenu des connaissances et de la durée d'une séance de classe. En effet, si le problème est ouvert de par son énoncé, le temps de recherche, lui, reste fermé.

Le problème est décontextualisé des contenus de cours du moment, pour éviter les effets pervers du contrat didactique. En aucun cas, la solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours.

FICHE METHODOLOGIQUE

Le déroulement d'une séance avec les élèves

- Présentation des consignes de PO.
- Présentation du problème.
- Mise en groupe.
- Phase d'appropriation individuelle du problème.
- Phase de recherche en groupe.
- Phase de rédaction d'un compte rendu du groupe.
- Phase de mise en commun débat.
- Phase de validation/ Institutionnalisation.

Ne pas oublier :

- ↳ d'annoncer l'expérience aux élèves
- ↳ d'annoncer et expliquer à l'administration
- ↳ de préparer minutieusement le plan de classe
- ↳ de préparer et demander le matériel nécessaire

⇒ *Description des différentes phases*

a) *Présentation des consignes de PO: (5 min)*

- ▶ Annoncer le déroulement de la séance et écrire le timing au tableau.
- ▶ Mettre les élèves en confiance «on a le droit à l'erreur ».
- ▶ Rappeler qu'un PO se résout en groupe et qu'il faut un secrétaire afin de prendre note du résultat des recherches.

Remarque:

En fait, vous aurez déjà présenté ces consignes au cours précédent. Il s'agit donc d'un rappel rapide

b) *Présentation du problème: (2 min)*

- ▶ Ecrire l'énoncé du problème au tableau.

Remarque:

- *Attention le texte doit être rigoureusement préparé avant.*
- *Pas de commentaires.*
- *Ne pas annoncer les objectifs spécifiques au problème (cela induirait des méthodes).*
- *Ne répondre aux questions que si la réponse aide à l'appropriation du problème par l'élève, à la compréhension de l'énoncé*
- *Empêcher les élèves de recopier l'énoncé.*

c) *Mise en groupe: (3 min)*

Le nombre de groupes et l'effectif dans les groupes dépendent de l'effectif de votre classe mais attention si le nombre de groupes est trop important la mise en commun est très longue et difficile. Essayer de ne pas faire plus de dix groupes (au moins au niveau de la rédaction de l'affiche ou du compte-rendu),

Remarque:

- *Il est impératif que les élèves soient prévenus et qu'ils aient déjà les consignes de mise en groupe.*
- *Dès que le problème est posé vous appliquez votre plan de classe prévu à l'avance.*

d) *Phase d'appropriation individuelle du problème: (5mn)*

- ▶ Les élèves doivent lire et relire l'énoncé et commencer les premiers essais suivants leurs premières intuitions, leurs premières envies
- ▶ Recentrer les élèves en cas de hors sujets évidents.

Remarque:

Empêcher les élèves de fuir: (lorsqu'on demande à un apprenant de réfléchir, il a l'impression qu'il faut montrer qu'il fait quelque chose aussi il recopie l'énoncé, trace des marges, cherche un cahier, etc...).

e) *Phase de recherche en groupe: (35mn)*

- ▶ Circuler dans la classe/Exhorter au travail de groupe.
- ▶ Faire formuler les démarches même si elles n'ont pas abouti Faire écrire les essais et les résultats partiels au fur et à mesure.
- ▶ Noter les situations intéressantes pour la mise en commun.
- ▶ Surveiller le temps

Remarque:

- *Attention pas d'intervention non réfléchies dans les groupes, pas de réponses aux questions qui induiraient une méthode.*
- *Pour aider les « questionneurs », renvoyer au groupe une question en reformulant leurs attentes.*
- *On peut intervenir dans un groupe pour le débloquent au bout d'un certain temps (exemple "faites des essais ! Que se passe-t-il si $a=1$?").*

f) *Phase de rédaction d'un compte rendu du groupe: (10mn)*

On demande aux élèves de consigner leurs résultats même partiels ou incomplets sur une feuille.

Il est important que les élèves décrivent aussi leur démarche pour arriver aux résultats. Vous pouvez les aider à rédiger leur démarche, mais attention, il ne faut ni trahir leur pensée, ni vous laisser piéger en dévoilant des résultats

Remarque:

- *Si aucun résultat n'est trouvé, il est important de suggérer aux élèves de décrire les essais tentés et de citer les conjectures émises.*
- *Si tous les groupes sont arrivés à un résultat partiel on peut proposer aux élèves de commencer le compte rendu.*
- *Si vous n'avez pas deux heures à la suite, vous pouvez vous arrêter là, ramasser les fiches, les étudier chez vous et préparer ainsi une validation adaptée aux apports des élèves.*

g) *Phase de mis en commun/ débat: (40mn)*

- ▶ Numéroté les productions dans l'ordre le plus pertinent pour atteindre vos objectifs
- ▶ Proposer des interventions autour d'une affiche, ces interventions commencent par "nous acceptons la solution car: ... ; nous refusons la solution car: ... ; nous proposons la modification suivante: ..."

Il s'agit de laisser les élèves présenter leur travail et tenter de faire valider ou invalider les résultats par les autres élèves.

Remarque:

- *C'est la phase la plus délicate. Ce n'est pas une lecture systématique de toutes les productions.*
- *Eviter les jugements de valeurs sur les fiches (c'est mauvais, ce n'est pas clair ...).*
- *Ne pas encore donner de réponses mais essayer de les faire sortir de la classe en posant des questions, en mettant en évidence des indices qui permettent de réagir ou de comparer des méthodes. (exemple sur une fiche on trouve $\cos x = 1,2$ «cette valeur ne vous choque-t-elle pas ? »).*
- *Attention au temps.*
- *Attention aux frustrations des groupes dont on aurait rien dit sur la production.*

h) Phase de validation: (15mn)

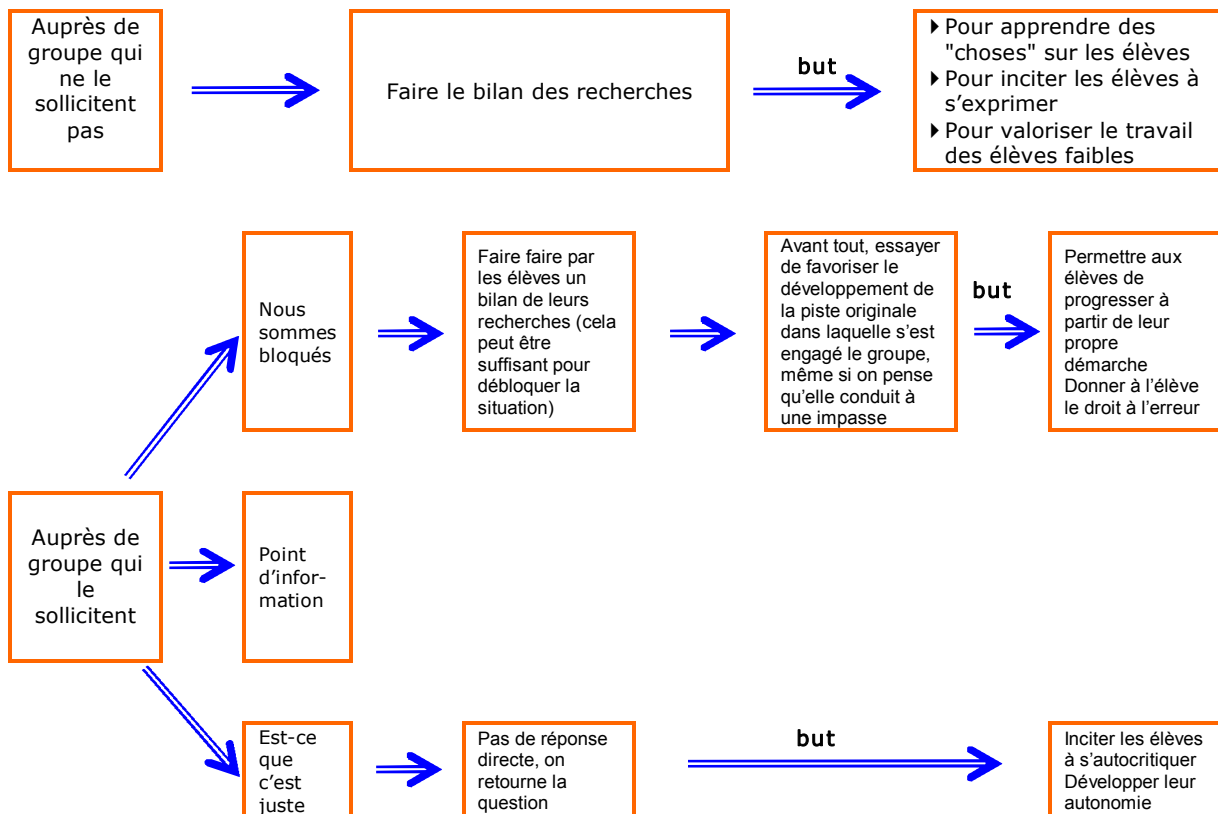
C'est le moment où vous reprenez un rôle proche de votre rôle habituel. Vous institutionnalisez les bons résultats et les démarches qui aboutissent en les classant et en les synthétisant. En ce qui concerne les démarches, il est important de mettre en évidence les indices de choix, ce qui permet parfois de justifier que certaines n'ont pas abouti. L'élève prend alors des notes: c'est un peu son cours.

Remarque:

Vous devez préparer plusieurs validations possibles en fonction de la richesse de l'exercice que vous avez pressentie et des objectifs spécifiques que vous vous êtes fixés.

MAIS, la validation que vous ferez dépend des résultats trouvés ou des démarches entamées par les élèves. Si vous montrez une méthode pour construire un segment de longueur donnée grâce au théorème de Thalès alors qu'aucun élève n'y avait pensé mais qu'ils avaient utilisé le théorème de Pythagore, vous vous trompez de validation! (Voir en pages 6 et 7 pour les modes d'intervention du professeur pendant les phases de recherche, de débat et de validation).

⇒ *Mode d'intervention du professeur pendant le débat*



⇒ *Mode d'intervention du professeur pendant le débat (suite)*

Avant le débat	<ul style="list-style-type: none">▶ II mettra l'accent sur l'aspect "responsabilité des élèves" ("la classe va décider laquelle de ces solutions ..." ou "vous allez décider..." surtout pas "nous allons décider...").▶ Eviter de commencer par la meilleure affiche, cela dévalorise les autres et leurs auteurs se désinvestissent très vite.▶ Faire attention de ne pas émettre quelque avis que ce soit sur l'intérêt des affiches (par exemple: "regardez bien l'affiche n°3 ...") ; le mieux est de se taire.▶ Il donne les consignes et fixe le temps de chaque étape. Il est ensuite "président de séance"
Pendant le débat	<ul style="list-style-type: none">▶ Le professeur entend successivement les porte-parole.▶ Il note, au tableau, les arguments après reformulation si nécessaire. Il n'a pas intérêt à filtrer lui-même les arguments avancés: c'est un obstacle à l'apprentissage de l'autonomie par les élèves.▶ Il donne la parole au groupe auteur une fois que tous les arguments sont notés au tableau. Tout le monde doit pouvoir les lire.▶ Le professeur fait débattre argument par argument, dans l'ordre qu'il choisit lui-même. Pour chaque argument, la question posée est: "cet argument est-il valable?". Suivant la "position" de la classe, l'argument est conservé ou barré.▶ La voix du professeur ne doit pas paraître prépondérante au jugement d'une solution
Tout au long du débat	<ul style="list-style-type: none">▶ Il faut absolument faire de ce débat une nécessité ressentie par la classe et non un exercice imposé par le professeur▶ La démonstration ne doit pas être ressentie comme "l'affaire" du professeur ou de quelques très bons élèves. (Il vaut mieux souvent arriver à une preuve convaincante produite par les élèves qu'à une démonstration amenée sans que la nécessité en soit vraiment ressentie par la classe)▶ Ne pas vouloir absolument faire une démonstration si la solution paraît, à tort ou à raison, trop évidente aux élèves pour en nécessiter une. L'échec provient alors souvent du problème lui-même.

⇒ *Mode d'intervention du professeur pendant la validation*

- ▶ C'est la phase où le professeur apporte le message exact que les élèves inscrivent dans leur cahier. C'est donc lui qui reprend les choses en main, mais en s'appuyant le plus possible sur les résultats du débat entre les élèves.
- ▶ Ne pas vouloir absolument faire une démonstration si la solution paraît, à tort ou à raison, trop évidente aux élèves. L'échec provient alors souvent du problème posé.
- ▶ Il évalue l'ensemble du travail effectué par les élèves et leur communique le résultat.
- ▶ Il met en valeur toutes les "ouvertures" données aux élèves par ce type travail, et le profit qu'il peuvent en tirer pour leur apprentissage

DEROULEMENT D'UNE EXPERIMENTATION EN CLASSE DE SIXIEME ET DE TROISIEME

Le problème :

1. Construire à la règle graduée et à l'équerre un rectangle de côté 2 cm et 6 cm
2. Construire, avec une règle non graduée et un compas, le plus grand nombre possible de rectangles dont l'aire est cinq fois plus grande que celle du rectangle tracé

Objectifs spécifiques à ce problème en classe de sixième:

- 1- Rechercher les diviseurs d'un entier naturel
- 2- Construire une médiatrice
- 3- Tracer des perpendiculaires
- 4- Tracer des rectangles
- 5- Reporter des longueurs de segments
- 6- Construire un segment de longueur donnée

Objectifs spécifiques à ce problème en classe de troisième:

- 1- Rechercher les diviseurs d'un entier naturel
- 2- Construire une médiatrice
- 3- Reporter des longueurs de segments
- 4- Construire un segment de longueur donnée en utilisant
 - le théorème de Thalès
 - le théorème de Pythagore
 - les relations métriques dans le triangle

Matériels à prévoir :

Equerre, règle, compas, papier blanc, carton ou papier d'emballage pour les affiches.

N.B : Ne pas dépasser 10 groupes pour mieux gérer a phase de débat.

⇒ *En classe de sixième:*

Présentation des consignes d'un problème ouvert : (5 min)

Rien de spécifique.

Présentation du problème: (5 min)

Insister sur le rôle du rectangle construit.

Rappeler aux élèves l'intérêt d'une règle non graduée.

Le problème est bien de construire des rectangles. Attention de ne pas restreindre le problème à une recherche de dimension de rectangles

Mise en groupe: (2mn)

Rien de spécifique.

Phase d'appropriation individuelle du problème: (5mn)

Insister sur le rôle du rectangle construit.
Rappeler aux élèves l'intérêt d'une règle non graduée.
Le problème est bien de construire des rectangles. Attention de ne pas restreindre le problème à une recherche de dimension de rectangles

Mise en groupe: (2mn)

Rien de spécifique.

Phase d'appropriation individuelle du problème: (5mn)

Ne pas laisser les élèves faire des cercles avec le compas pour s'occuper.

Phase de recherche en groupe: (35mn)

Les interventions pourront être:

- * Rappeler qu'il ne faut pas se contenter des dimensions des rectangles
- * Rappeler de bien noter les programmes de construction
- * Encourager à trouver d'autres rectangles
- * Débloquent si un groupe ne trouve qu'il s'agit de trouver des rectangles de 60 cm^2

Phase de rédaction d'un compte rendu du groupe: (10mn)

Recommander de donner des indications de construction.
Réfléchir en passant voir les productions au numérotage.
Ne pas exiger le début qui est commun à tous les groupes: « le rectangle initial fait 12 cm^2 .

Phase de mise en commun/ débat: (40mn)

Partir des affiches qui ont le moins de résultats pour éviter les répétitions. Si des résultats sont comparables avec des méthodes différentes, mettez les groupes en relation. Si des résultats sont contradictoires, demandez aux élèves de prendre partie en argumentant (exemple rectangle (10,6) et (10,30) c'est à dire (2X5,6X5).
Il faudra alors penser à valider : lorsqu 'on multiplie les longueurs des deux cotés par 5, l'aire est multipliée par 25.

Phase de validation: (15mn)

Cette validation doit être accompagnée de beaucoup de dessins.
La validation dépend de votre objectif.
Rappel: on ne valide que ce qui a été trouvé par les élèves. Mais on peut terminer la validation par une ouverture du problème : une autre question par exemple ou une généralisation.

⇒ *Validation proposée en classe de sixième*

1- Validation de la construction des rectangles dont les dimensions sont entières:

- * Les rectangles sont au nombre de 6: (1; 60); (2; 30); (3; 20); (4; 15); (5; 12); (6; 10).
Pour les rectangles (2; 30) et (6; 10), par report de segments de longueur 2cm, on les construit aisément.
On pourrait aussi y arriver par juxtaposition de cinq rectangles (2; 6).
- * Pour les autres, la difficulté vient du fait que l'une des dimensions n'est pas un multiple de 2. Il suffit d'un segment de longueur 1cm pour les construire.
La médiatrice d'une largeur du rectangle (2; 6) la partage en deux segments de longueur 1cm. De même les médiatrices des segments de longueur 6, 10 et 30 permettent d'avoir des segments de longueurs respectives 3, 5 et 15.

2- Validation de la construction des rectangles dont l'une au moins des dimensions est un nombre décimal dont la partie décimale est 0,5:

Il suffit de construire un segment de longueur 0,5cm en partageant par la médiatrice un segment de longueur 1cm en 2 segments d'égale longueur.
Par exemple, à partir du rectangle (4; 15), on construit le rectangle (8; 7,5).

3- Validation de résultat, partiel mais généralisable:

- * Construction d'un segment dont la longueur est la moitié de celle d'un segment donné, le quart, le huitième, etc...
- * L'aire d'un rectangle dont on a multiplié les longueurs des cotés par 2, 3, 4, 5 est multipliée par 2×2 , 3×3 , 4×4 , 5×5 , etc...

⇒ *En classe de troisième:*

Présentation du problème: 5 (min)

Insister sur le rôle du rectangle construit.
Rappeler aux élèves l'intérêt d'une règle non graduée.
Le problème est bien de construire des rectangles. Attention de ne pas restreindre le problème à une recherche de dimension de rectangles.

Mise en groupe: (2 min)

Rien de spécifique.

Phase d'appropriation individuelle du problème: (5mn)

Ne pas laisser les élèves faire des cercles avec le compas pour s'occuper.

Phase de recherche en groupe: (35 min)

Les interventions pourront être:

- * Rappeler qu'il ne faut pas se contenter des dimensions des rectangles.
- * Rappeler de bien noter les programmes de construction.
- * Encourager à trouver d'autres rectangles.

Phase de rédaction d'un compte rendu du groupe: (10 min)

Recommander de donner des indications de construction.

Réfléchir au numérotage en passant voir les productions.

Ne pas exiger le début qui est commun à tous les groupes: « le rectangle initial fait 12 cm², $12 \times 5 = 60$ etc . ».

Phase de mise en commun/ débat: (40 min)

Si des résultats sont comparables avec des méthodes différentes mettez les groupes en relation. Si des résultats sont contradictoires, demandez aux élèves de prendre partie en argumentant.

Si (10,30) sort, il faudra penser à valider « lorsqu 'on multiplie les longueurs des deux côtés par n, l'aire est multipliée par n^2 »..

Phase de validation: (15 min)

Cette validation doit être accompagnée de beaucoup de dessins.

La validation dépend de votre objectif.

Rappel : on ne valide que ce qui a été trouvé par les élèves au moins partiellement

Mais on peut les aider à prouver leur conjectures et la validation par une ouverture du problème : une autre question par exemple ou une généralisation.

⇒ *Validation proposée en classe de troisième*

Remarque:

Tous les rectangles solutions sont de la forme (p; 60/p), les méthodes de constructions dépendent de p.

1- *Voir les validations 1 et 2 sur la fiche de 6^{ème}.*

- rectangles dont les dimensions sont entières.
- rectangles dont les dimensions sont décimales avec une partie décimale « égale à 0,5 ».

2- *Validation de la construction des rectangles dont l'une au moins des dimensions est un nombre rationnel non entier*

Lorsque la mesure d'un côté est une fraction irréductible p/q , où p et q désignent deux entiers naturels non nuls, il suffit, pour le construire, d'avoir un segment de longueur $1/q$. Ce qui revient à partager un segment de longueur 1(un) en q segment d'égale longueur.

* Le Théorème de Thalès est indiqué

3-

Validation de la construction des rectangles dont une dimension est un nombre irrationnel.

Lorsque la dimension d'un côté est de la forme $p\sqrt{q}$, où p et q désignent 2 entiers naturels non nuls, pour le construire, il suffit de construire un segment de longueur \sqrt{q} cm.

* Dans certains cas, on peut appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle ABC.

Par exemple, si $AB = AC = 1$ cm, alors $BC = \sqrt{2}$ cm pour obtenir $5\sqrt{2}$ cm,

il suffit de prendre $AB = 1$ cm et $AC = 2$ cm. Ainsi peut-on construire les rectangles $(4\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$ ou $(6\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$.

Mais le théorème de Pythagore ne nous permet pas de traiter tous les cas.

* On peut utiliser les relations métriques dans un triangle rectangle.

Supposons que l'on veuille construire le rectangle $(2\sqrt{6}, 5\sqrt{6})$. Nous devons construire un segment de longueur $\sqrt{6}$ cm.

Soit $[AB]$ un segment de longueur 5 cm et H le point de $[AB]$ tel que $AH = 2$ cm. Soit (C) un demi-cercle de diamètre $[AB]$. La perpendiculaire à (AB) passant par H rencontre (C) en C .

Dans le triangle rectangle en C , (CH) est la hauteur issue du sommet de l'angle droit d'où $CH^2 = HA \times HB = 2 \times 3 = 6$. Donc $CH = \sqrt{6}$.

Cette démarche permet de valider toutes les solutions où un côté a pour mesure $p\sqrt{q}$, avec p et q désignent 2 entiers naturels non nuls.

EXERCEZ - VOUS

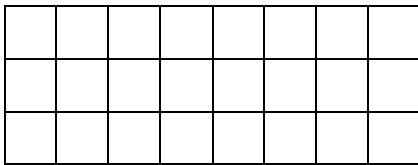
Comment chercher un problème ouvert

La démarche qui permet de chercher un problème ouvert est sensiblement la même que celle que l'on propose aux élèves. Devant un problème ouvert, ne restez donc pas sec. Ne cherchez pas d'emblée à le raccrocher à une notion qui vous paraît sous-jacente dans l'énoncé. Faites des essais. Tentez des conjectures. Testez vos conjectures. Démontrer la conjecture que vous avez retenue.

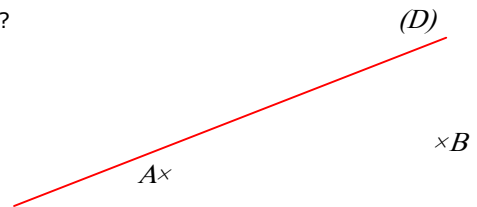
Un autre petit conseil, ne le cherchez pas seul. Non que vous n'ayez aucune chance de le résoudre, mais la recherche en groupe engendre des discussions, parfois des conflits qui sont riches en enseignement, et qui vous permettront d'anticiper sur les réactions de vos élèves et sur le niveau dans lequel le poser.

Maintenant, voici quelques problèmes en vrac pour vous exercer. La plupart sont de niveau collègue, mais certains vous surprendront peut-être. Faites tout de même attention, il s'agit de mettre les élèves en apprentissage, pas de les épater avec des solutions qui ne sont

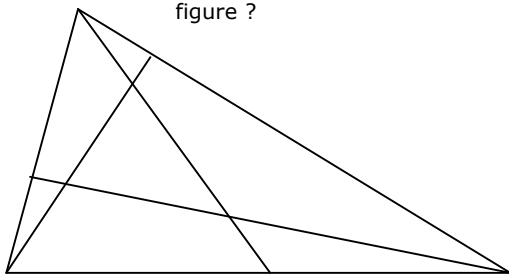
Combien y a-t-il de polygones sur ce dessin ?



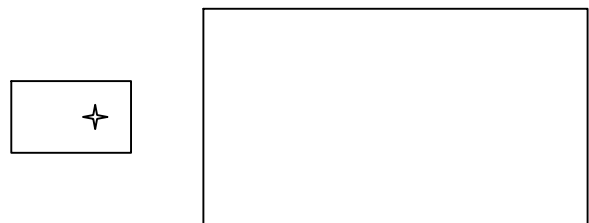
Existe-t-il un point M sur la droite (D) telle que la somme des distances de A à M et de M à B soit minimum ?



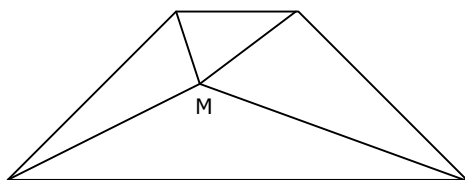
Combien de triangles sont dessinés sur cette figure ?



Placer le point (étoile) au même endroit dans le grand rectangle.



Où doit-on placer le point M pour que le trapèze soit partagé en quatre triangles de même aire ?



ABC est un triangle quelconque. Peut-on construire un triangle équilatéral dont les trois sommets appartiennent aux trois côtés de ABC ?

