Le document qui suit a servi de support à plusieurs conférences portant sur les travaux du groupe “***Problématiques Lycée*”,** dirigé par Régis GRAS, conférences données par deux membres de ce groupe :

☞ Bernard PARZYSZ dans le cadre du stage “***Olympiades et résolution de problèmes*”** organisé par l’IREM de Montpellier à destination de collègues tunisiens et qui s’est tenu du du 7 au 19 juillet 2003.

☞ Jean-Pierre RICHETON à l’invitation de diverses Régionales APMEP (Besançon, Toulouse, Montpellier, Séminaire de l’APMEP en mai 2002, …)

Vous y trouverez de nombreux extraits des brochures n°150 et n°154 de l’APMEP :

« Pour un enseignement problématisé des Mathématiques au Lycée »

Tome 1 : en référence privilégiée à des contenus
Tome 2 : en référence privilégiée à des objectifs méthodologiques

DIX PROBLÉMATIQUES
POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

A- En référence à des savoirs

1) Repérage
2) Étude de configurations
3) Dynamique des points, figures et nombres
4) Mesure des grandeurs
5) Traitement et représentation de données statistiques

B- En référence à des méthodes

6) Techniques algorithmiques
7) Changement de cadres et de registres
8) Recueil, traitement, communication de l'information
9) Construction (ou choix optimal) de modèles et d'outils
10) Conjecture, preuve, validation, réfutation

OBJECTIF

Construire un “programme d’étude” à partir de grandes classes de problèmes (ou problématiques) dans une approche systémique intégrant contenus et compétences lors de l’étude de situations-problèmes.

TROIS COMPOSANTES INDISSOCIABLES

- situations
- démarches
- savoirs

LA SITUATION DOIT :

- Présenter de l’intérêt pour l’élève (→ dévolution)
- Lui permettre un début de résolution
- Correspondre à l’objectif visé
- Mettre si possible en jeu plusieurs cadres et/ou registres.

LES HUIT MOMENTS DE L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE

(GTD de Mathématiques – "anciens programmes")

1) Formuler un problème
2) Conjecturer un résultat
3) Expérimenter sur des exemples
4) Bâtir une démonstration
5) Mettre en œuvre des outils théoriques
6) Mettre en forme une solution
7) Contrôler les résultats obtenus
8) Évaluer la pertinence de ces résultats

… ceci passe nécessairement par la réforme de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat…

APMEP

Groupe "Problématiques Lycée"

Pour un enseignement problématisé des Mathématiques au Lycée

Tome 1

En référence privilégiée à des contenus

Brochure n° 150 - N° ISBN : 2-912846-26-9

APMEP

PROBLÉMATIQUE 1 :
REPÉRAGE

Objectifs spécifiques

- objectiver des positions (décentration)
- relativiser des positions (point de vue)
- rechercher des invariants
- décrire le statique comme le dynamique

Démarches

- définir un (des) système(s) de référence
- paramétrer les objets (géom. → algébr.)
- numériser (quantifier)
- lier plan et espace (jeu de cadres)

PROBLÉMATIQUE 1

L'essentiel, à travers cette problématique, est de faire prendre conscience aux élèves de l'aspect arbitraire et relatif du choix du repérage d'un point où doivent être cependant optimisées et conciliées l'objectivité de l'information sur ce point, l'unicité du placement et l'opérativité du système de représentation choisi. Les situations proposées et les démarches attendues des élèves le sont à titre illustratif et indicatif. L'exploitation didactique doit conduire à l'appropriation de certains contenus d'enseignement sous l'angle de cette problématique. Cette appropriation ne peut donc pas être considérée comme totale et définitive. D'autres situations pourront la conforter et l'enrichir.

Notons qu'il serait d'ailleurs maladroit d'espérer traiter séparément chacune des problématiques énoncées : elles ont toutes plus ou moins partie liée, et on peut, au cours de problèmes, en rencontrer plus d'une. La problématique “Repérage” est par exemple indissociable de “Représentation…” (n°2), de “Changements de registres et de cadres” (n°7) et “Choix opportun…” (n°9). On ne pourra s'empêcher de voir en “Traitement et représentation de données statistiques” (n°5) une de ses applications privilégiées. Les exemples choisis ici le seront toutefois pour illustrer plus particulièrement les notions de “Repérage”.

PROBLÉMATIQUE 1

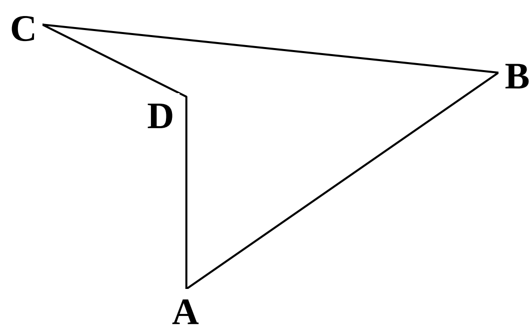
Situations	Démarches	Contenus
Promenade sur un réseau.	Jeu de cadres.	Coordonnées cartésiennes.
Régionnement (plan, droite, espace).	Identifier des points par leurs propriétés.	Coordonnées polaires, cylindriques…
Description d'un itinéraire.	Mathématisation.	Orientation (plan, espace).
Description d'une trajectoire.		Cinématique
Génération de courbes et de surfaces.	Choix d'un repère	Coordonnées sphériques
Itinéraire sur la sphère terrestre.		Barycentre, coord. barycentriques
Etude d'un système de points pondérés.	Jeu de cadres points / vecteurs	
Condition de cocyclicité	Correspondance arc / angle	Angle inscrit, arc capable

Exemples

❋❋❋ 2 ❋❋❋

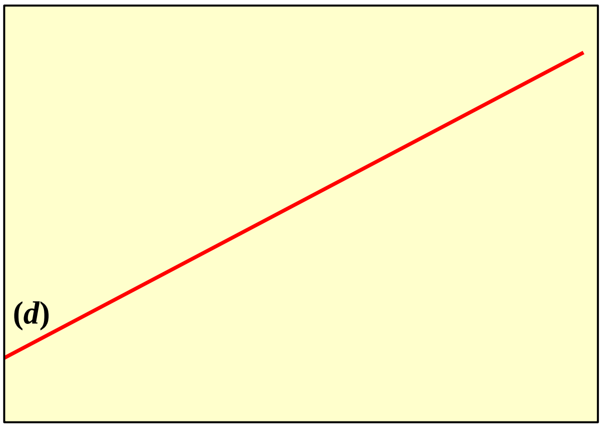
Le quadrilatère ABCD ci-dessous a été dessiné dans un repère orthonormal qui a été effacé.

Le retrouver à partir des coordonnées de ses sommets : A (–4 ; 2) ; B (2 ; –6) ; C (3 ; 6) ; D (1 ; 2).



2^{nde}

❊❊❊ 3 ❊❊❊



Retrouver, dans le cadre ci-contre un repère orthonormé dans lequel la droite (***d***) a pour équation : $3x + y - 4 = 0$.

Remarques :

1° *Il y a une infinité de solutions, en fonction de l'orientation choisie, et par homothétie.*

2° *Ce problème proposé à des élèves de Seconde a conduit à différents types de solution et... à beaucoup d'échecs. On relève 2 solutions typiques :*

- l'une très dynamique où les propriétés sont utilisées en acte et la construction est menée selon un programme justifié : représenter le coefficient directeur, construire l'axe des ordonnées, puis celui des abscisses,

*- l'autre très calculatoire où on détermine successivement les paramètres de l'équation de (**d**), puis la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle défini à partir des intersections de (**d**) avec les axes, puis l'angle de (**d**) avec [Ox), ...*

Variante : *dans une phase exploratoire, on peut travailler avec papier calque, en construisant un repère orthonormé, et la droite (**d**), puis en reportant ce repère sur la figure initiale. On cherche alors d'autres repères convenant.*

On peut bien entendu donner cet exercice **en $3^{\text{ème}}$** en partant de l'équation réduite d'une droite

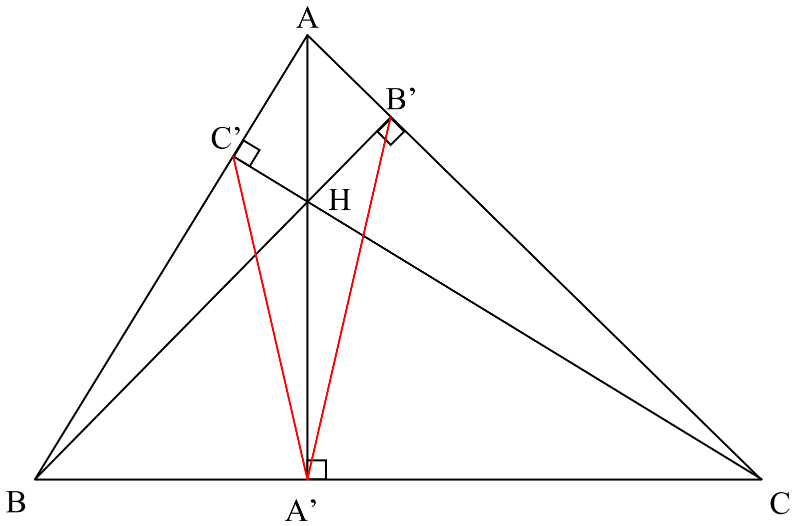
$3^{\text{ème}}$ / 2^{nde}

❊❊❊ autre exemple ❊❊❊

Exemple faisant référence à une situation de cocyclicité et faisant appel au théorème de l'angle inscrit…

Problématique 1

En traçant les trois hauteurs (AA’), (BB’) et (CC’) d’un triangle quelconque ABC, il semble bien que, par exemple, la hauteur (A’A) soit bissectrice de l’angle $\widehat{B'A'C'}$…



Remarques :

La forme de la question oblige l’élève à des initiatives, comme de faire plusieurs cas de figures soignées pour se faire une idée de la validité de cette conjecture.

*Un **travail en groupe** serait donc particulièrement indiqué dans ce cas et/ou une simulation avec un **logiciel de géométrie** tel que CABRI-géomètre.*

Le problème peut être proposé dès la classe de Seconde. Le résultat présente un certain intérêt puisqu’il relie par une propriété remarquable des droites particulières d’un triangle.

Indication de solution *:*

La présence de triangles rectangles de même hypoténuse nous lance sur la piste de points cocycliques… (“théorème de l’angle droit”…)

↳ les points A’, B, C’ et H sont cocycliques,

↳ les points A’, C, B’ et H sont cocycliques,

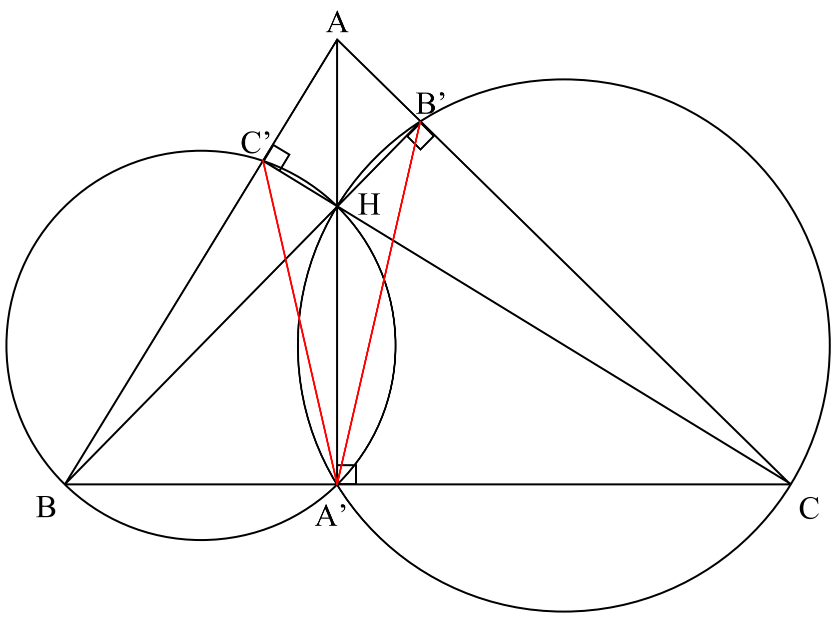
ensuite la conjecture nous “branche” sur la recherche d’angles de même mesure …

↳ du fait des cocyclicités on a :

$\widehat{C'A'H} = \widehat{C'BH}$ et

$\widehat{B'A'H} = \widehat{B'CH}$ …

Il reste donc à prouver l’égalité des angles $\widehat{C'BH} = \widehat{ABB'}$ et $\widehat{B'CH} = \widehat{ACC'}$… ce qui est immédiat car ils ont même complément $\widehat{BAC}$ en considérant respectivement les triangles rectangles ABB’ et ACC ’…



PROBLÉMATIQUE 2 :
ÉTUDE DE CONFIGURATIONS

Objectifs

- ❈ connaissance des « figures » de base
- ❈ dialectique « su / perçu »
- ❈ apprentissage des modes de représentation

Spécificité

Lieu où se mêlent intimement les cadres géométrique, algébrique et graphique.

Situations	Démarches	Contenus
Construction de figures planes	Coordonner et assembler des données. Utiliser le dessin pour faire de la géométrie.	Eléments remarquables du triangle, des quadrilatères, etc.
Exploration du cercle.	Observer, conjecturer, valider, calculer…	Angles, trigonométrie.
Représentation de solides Construction et développement de solides.	Utiliser la géométrie pour dessiner Passer d'une représentation à une autre.	Solides usuels (polyèdres, corps ronds)
Génération cinématique de courbes	Formaliser pour anticiper, valider expérimentalement	Equations (cartésiennes, paramétriques)
Recherche de chemins sur un graphe	Changement de registre	Graphes

Exemples

❈❈❈ 11 ❈❈❈

On peint les faces d'un cube en bois, puis on découpe ce cube en 1000 cubes identiques à l'aide de traits de scie parallèles aux faces. Combien y a-t-il de petits cubes qui ont au moins une face peinte ?

Remarque :

Ce problème permet de faire un retour sur le volume du cube et sur une de ses représentations mentales. Le contexte proposé est suffisamment "concret" et doté d'un enjeu pour que les élèves y trouvent une situation favorisant l'approche heuristique. Une solution simple consiste à envisager la propriété contraire de celle qui définit les cubes admettant une face peinte.

Indication de solution :

Les cubes qui n'auront aucune face peinte forment un cube de $8\times8\times8 = 512$ *petits cubes. Il y a donc* $1000 - 512 = 488$ *cubes qui ont au moins une face enduite de peinture.*

❈❈❈ 12 ❈❈❈

Dans une boîte cubique d'arête unité sont enfermées 2050 mouches. Montrer qu'il y a, à tout moment, une boule sphérique de rayon 1/9 où se trouvent au moins 5 mouches.

Remarque :

Cette situation favorise encore l'approche heuristique tout en nécessitant une représentation mentale des relations d'inclusion entre sphère et cube : difficile de raisonner avec des sphères car non jointives… d'où la nécessité de devoir contourner l'obstacle en raisonnant avec des cubes… (mais on peut aussi au départ poser ce problème en remplaçant « sphère de rayon 1/9 » par « cube d'arête 1/8 »…)

Elle permet également de faire un retour sur les volumes respectifs de la sphère et du cube. De plus, enchaîné au problème précédent, ce problème voit sa solution facilitée et gratifie la méthode employée. Enfin, la solution proposée montre la qualité opératoire de la notion de moyenne, rarement en œuvre dans les problèmes où elle est plutôt descriptive.

Indication de solution :

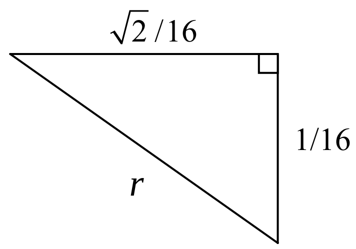
Donc, subdivisons notre cube en petits cubes identiques… À supposer que cela ne soit pas possible (d'avoir au moins 5 mouches dans l'un d'eux), cela signifierait qu'il y a au plus 4 mouches dans chacun des petits cubes…

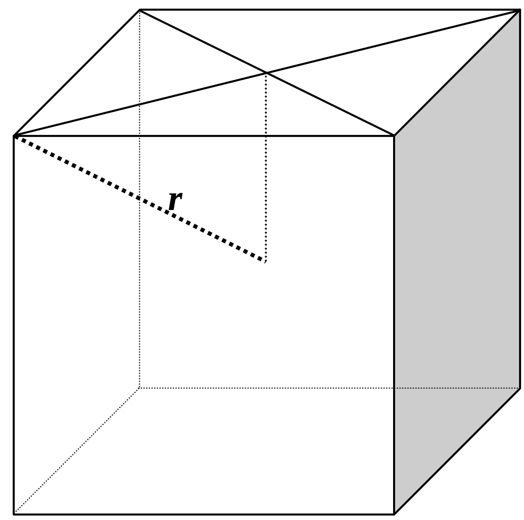
Or $2050 = 4\times 512{,}5$ et $512 = 8^3$ …

↳ on partage le cube en 512 cubes identiques de côté 1/8

↳ nombre de mouches moyen dans chaque petit cube : 2050/512 ≈ 4,0039… donc il existe au moins un petit cube qui contient au moins 5 mouches… (si non cela voudrait dire que tous les petits cubes contiennent au plus 4 mouches, ce qui ne ferait que 2048 mouches au total !)

↳ or un petit cube de rayon 1/8 est tout entier contenu dans une sphère de rayon $r = \dfrac{\sqrt{3}}{16} \approx 0{,}108 < \dfrac{1}{9} \, (\approx 0{,}111...)$





❈ ❈ ❈ Théorème de Thalès ❈ ❈ ❈

Soient trois plans parallèles P_1, P_2, P_3.

Une droite d_A les coupe respectivement en A_1, A_2, A_3.

Une droite d_B les coupe respectivement en B_1, B_2, B_3.

Dessiner la figure…

Indication de solution :

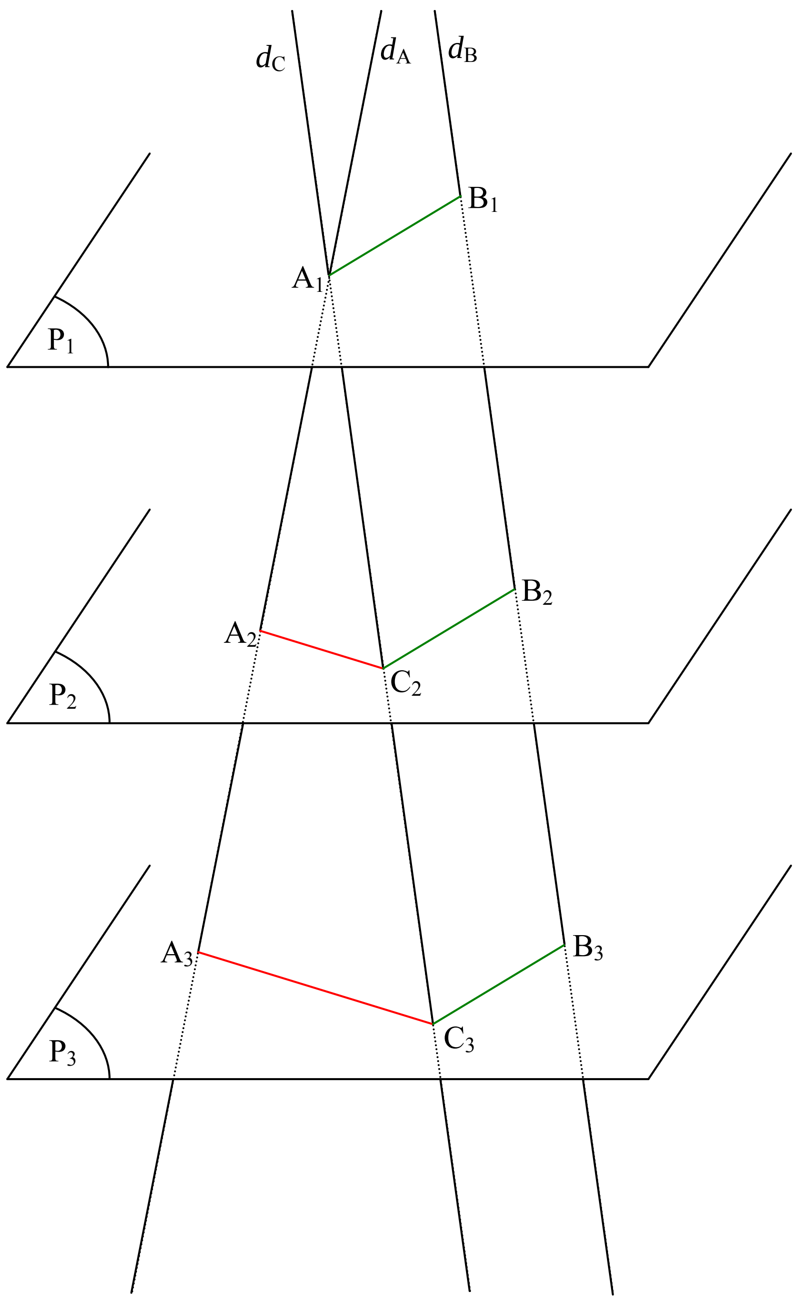
On introduit la droite d_C passant par A_1 et parallèle à la droite d_B…

Les droites d_C et d_A étant sécantes sont coplanaires d'où $(A_2C_2) // (A_3C_3)$ car les plans P_2 et P_3 sont parallèles…

Les droites d_C et d_B étant parallèles sont coplanaires d'où $(A_1B_1)//(C_2B_2)//(C_3B_3)$ car les plans P_1, P_2 et P_3 sont parallèles…

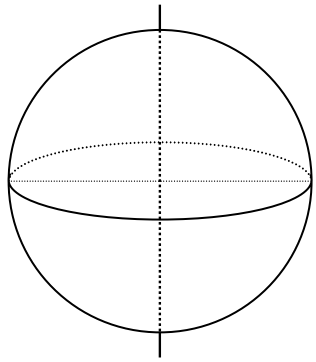
➯ Cela permet de déterminer, dans l'ordre :

- le point C_2 à partir de B_2 parallèlement à (A_1B_1),
- puis C_3 à partir de A_3 parallèlement à (A_2C_2)
- et enfin B_3 à partir de C_3 parallèlement à (C_2B_2)…



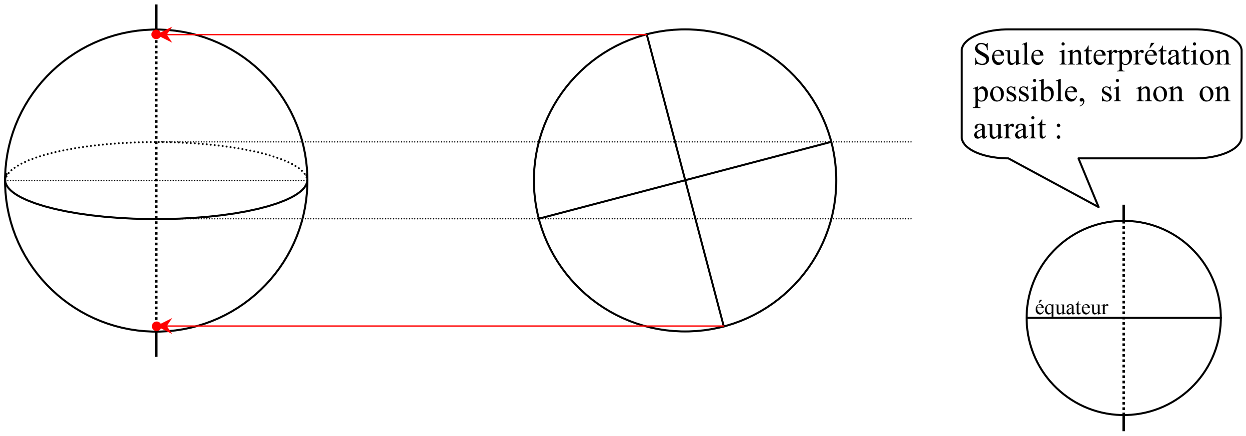
❈ ❈ ❈ La sphère terrestre ❈ ❈ ❈

Ce dessin classique de la sphère terrestre, avec la ligne des pôles et l'équateur, est critiquable. Pourquoi ? Comment le rectifier ?



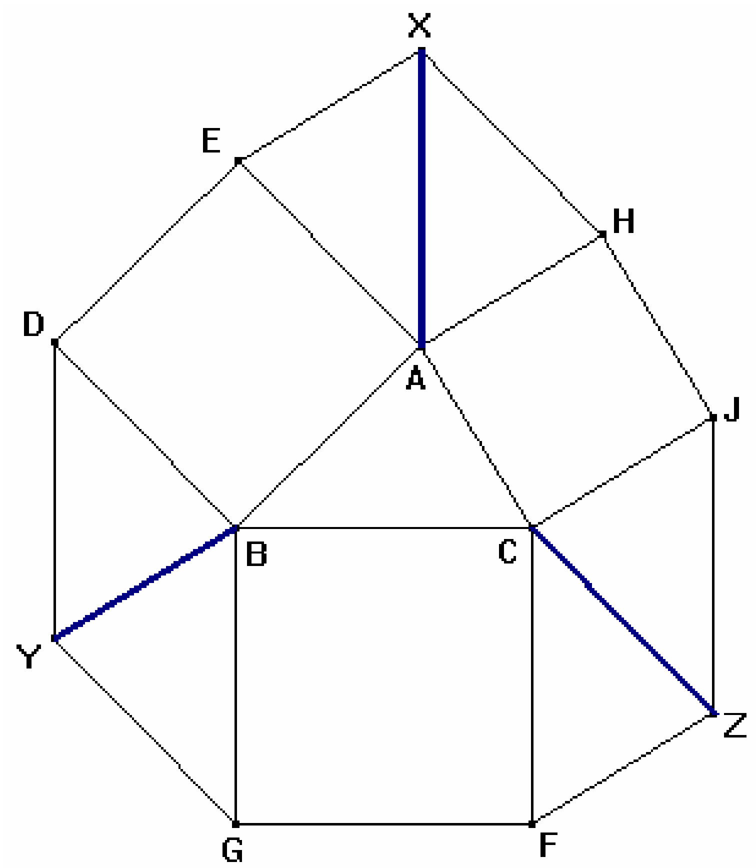
Indication de solution :

↳ grâce à la vue de profil… puis on "coordonne" les deux dessins…



On construit, sur les côtés d'un triangle ABC, extérieurement à celui-ci, les carrés ABDE, BCFG et CAHJ, puis les parallélogrammes EAHX, DBGY et FCJZ.

Démontrer que les droites (AX), (BY) et (CZ) sont concourantes.



Indication de solution :

① Soit r la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$.

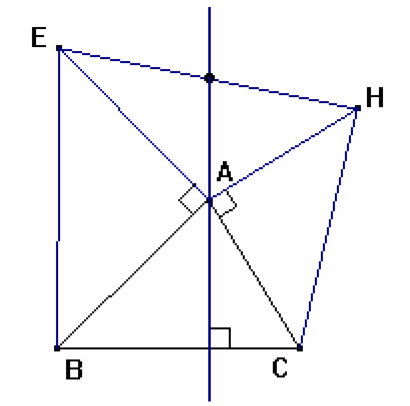
On a : $r(A) = A$, $r(C) = H$, $r(E) = B$

Posons $I = r(B)$ et soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$.

On a $t(I) = A$ et $t(H) = X$.

D'où : $\begin{array}{l} B \overset{r}{\mapsto} I \overset{t}{\mapsto} A \\ C \overset{r}{\mapsto} H \overset{t}{\mapsto} X \end{array}$ et donc (BC) ⊥ (AX)…

(autrement dit, la hauteur issue de A dans le triangle ABC est la médiane issue de A du triangle AEH…)



② En utilisant le produit scalaire…

$$\overrightarrow{AX}\bullet\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AH}\right)\bullet\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\underbrace{\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{BA}}_{=0}+\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}\bullet\overrightarrow{BA}+\underbrace{\overrightarrow{AH}\bullet\overrightarrow{AC}}_{=0}$$

d'où : $\overrightarrow{AX}\bullet\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AH}\bullet\overrightarrow{AB}$.

Or par la rotation r de centre A et d'angle $\pi/2$, on a $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}\right)=\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC}\right)$…

et donc $\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}\bullet\overrightarrow{AB}$, d'où : $\overrightarrow{AX}\bullet\overrightarrow{BC}=0$…

③ En utilisant la rotation vectorielle φ d'angle π/2…

De $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AE}$, on tire $\varphi\left(\overrightarrow{AX}\right)=\varphi\left(\overrightarrow{AH}\right)+\varphi\left(\overrightarrow{AE}\right)=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$… !

④ En se plaçant dans le plan complexe…

Soit A d'affixe 0, C d'affixe $\boldsymbol{c}$ et B d'affixe $\boldsymbol{b}$. On en déduit que H a pour affixe i$\boldsymbol{c}$, E pour affixe –i$\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AX}$ a pour affixe i$\boldsymbol{c}$ – i$\boldsymbol{b}$ = i($\boldsymbol{c}$ – $\boldsymbol{b}$) alors que $\overrightarrow{BC}$ a pour affixe $\boldsymbol{c}$ – $\boldsymbol{b}$…

❊❊❊ autre exemple : *changer de point de vue !..* ❊❊❊

EVAPM 2^nde – exercices à proposer sous diverses formes :

F1 :°En balisant l'exercice de questions intermédiaires.

F2 : En leur laissant l'initiative de la démarche.

F1 :

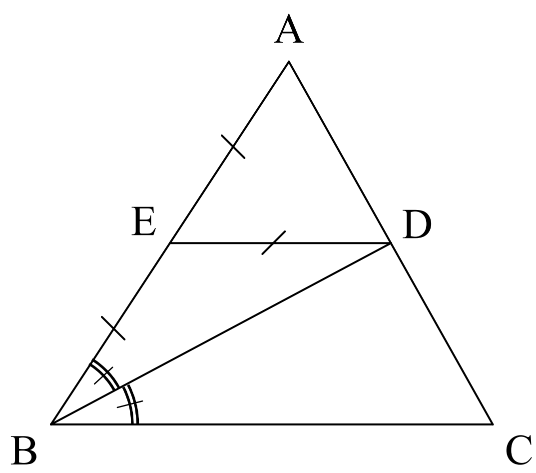
Les hypothèses sont schématisées sur la figure ci-contre. Le point E appartient au segment [AB] et le point D au segment [AC].

Vous justifierez toutes vos réponses.

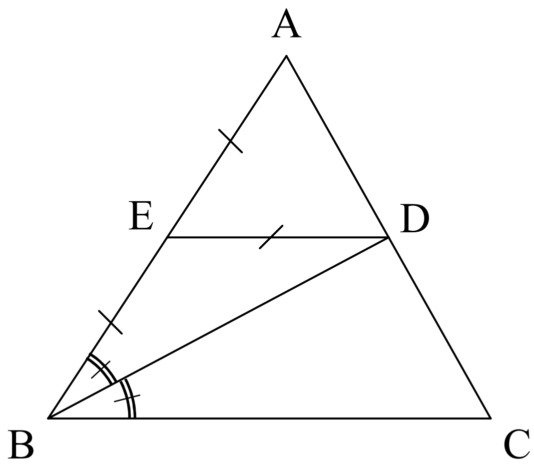
a) Déterminer la nature du triangle ABD.

b) Que peut-on en déduire pour le point D ?

c) En déduire la position des droites (ED) et (BC).



F2 :



Les hypothèses sont schématisées sur la figure ci-contre.

Justifiez la position la position du D sur [AC] et celle des droites (ED) et (BC).

Scénario : (bien rodé avec des élèves “habitués” à la recherche de problème demandant une prise d'initiative…)

Traduire les hypothèses :

- ☞ E milieu de [AB]
- ☞ EA = ED = EB ou encore E équidistant des points A, B et D
- ☞ Les triangles AED et BED sont isocèles en E
- ☞ [BD) bissectrice de $\widehat{ABC}$

Première piste : la reconnaissance d'une situation faisant référence au “théorème de l'angle droit”

① E étant équidistant des points A, B et D, le triangle ABD est donc rectangle en D

② Il en est donc de même pour le triangle BCD rectangle en D, d'où les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ ont même mesure $\left(90°-\frac{1}{2}\widehat{ABC}\right)$ car même complément à 90°

③ Le triangle ABC est donc isocèle en B…

Autre possibilité, après avoir établi que le triangle ABD est rectangle en D :

② (BD) étant à la fois bissectrice et hauteur dans le triangle ABC, elle en est aussi la médiatrice issue de B (possibilité aussi de faire référence à des triangles isométriques…) puis de conclure comme en ③ que le triangle ABC est isocèle en B

④ Le point D est donc le milieu de [AC]

⑤ d'où (“théorème des milieux”…) : (ED) // (BC)

Deuxième piste : la présence de triangles isocèles en E permet d'obtenir des égalités d'angles…

① $\widehat{EAD} = \widehat{EDA}$ et $\widehat{EBD} = \widehat{EDB}$

② comme $\widehat{EBD} = \widehat{DBC}$, on en déduit que $\widehat{EDB} = \widehat{DBC}$ et donc on a des angles alternes internes de même mesure d'où (ED) // (BC)

③ E étant le milieu de [AB], (ED) étant parallèle à (BC), on en déduit donc que D est le milieu de [AC] (réciproque du "théorème des milieux"…)

PROBLÉMATIQUE 3 :

DYNAMIQUE DES POINTS, FIGURES ET NOMBRES

Transformations = applications de l'espace réel ou complexe (ou d'une partie) dans lui-même (→ cadre géométrique ou algébrique)

Objectifs

- étudier leurs effets sur les configurations simples
- anticiper leurs effets (perceptivement)
- développer une vision "dynamique" :
  - ☞ vecteur → translation
  - ☞ angle → rotation
  - ☞ bissectrice → réflexion
  - ☞ médiatrice → réflexion
  - ☞ fonction → courbe

Deux aspects des transformations au lycée

- Outils pour résoudre des problèmes
- Objets d'étude (définition, propriétés, invariants…)

PROBLÉMATIQUE 3

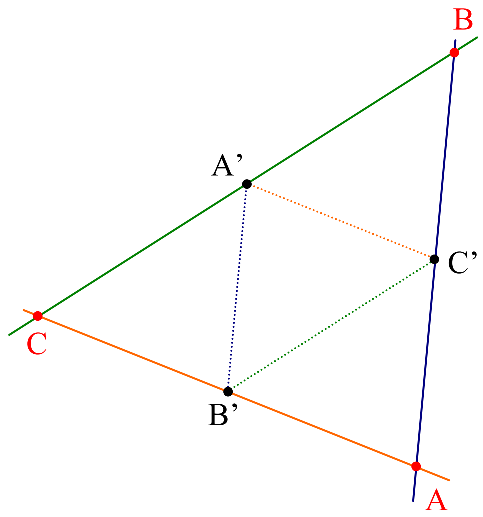
Situations	Démarches	Contenus
Dessiner l'image d'une figure. Ombre d'un solide.	Utiliser les algorithmes de construction.	Transformations usuelles ou non. Projections.
Résolution de problèmes	Repérer des couples (objet, image).	Lieux géométriques.
Étude du mouvement d'un mobile.	Passer dans le cadre algébrique.	Polynômes (1^{er} et 2^{nd} degrés), repère.
Transformation de dessins par homothétie, relation avec la multiplication vectorielle.	Dessiner et effectuer des changements de mesure. Reconnaître perceptivement une homothétie.	Multiplication vectorielle dans le plan et l'espace
Les transformations comme outils de recherche de solution d'un problème de géométrie.	Reconnaître une situation où une transformation peut être en jeu.	Symétries, homothétie, rotation dans le plan.
Projection d'ombres solaires.	Étudier une situation complexe dans l'espace par des coupes affines conservant une information maximale.	Passage de "3 D" à "2 D" par projection parallèle.

Exemples

❈❈❈ **1** ❈❈❈

On connaît les milieux des côtés d'un triangle. Retrouver ses sommets.

Ce problème peut trouver sa place dans le premier cycle et, a fortiori, en classe de Seconde. En effet, il ne nécessite que la connaissance de la propriété liée aux "droites des milieux" d'un triangle…



❈❈❈ **3** ❈❈❈

On connaît les milieux des côtés d'un quadrilatère convexe. Retrouver, dans la mesure du possible, ses sommets.

Ce problème qui pourrait également trouver sa place dans le premier cycle est a fortiori abordable en classe de Seconde où l'on pourra donner une expression plus vectorielle du processus de construction.

***Indication de solution** :*

"stratégie élève" : après avoir placé quatre points pour matérialiser les milieux, on commence par placer un sommet A au hasard, puis on place les sommets suivants… mais « cela ne se referme pas » nécessairement…

- *prendre le problème "à l'envers"… c'est à dire, à partir d'un quadrilatère donné, construire les milieux des côtés… d'où une première conjecture : les quatre milieux forment un parallèlogramme (démonstration faisant appel au "théorème des milieux"…)*

↳ *à partir d'un parallélogramme, quelque soit le sommet A "pris au départ", « cela semble se refermer à chaque fois »… d'où une deuxième conjecture : il y a une infinité de solutions, le sommet A "pris au départ" étant indifférent…(ce qui ici peut représenter en soi une difficulté de mise en œuvre pour des élèves de Seconde…)*

Soient M, N, P, Q les milieux donnés et donc tels que MNPQ soit un parallélogramme. Qu'a-t-on fait à partir de A ?

On a :

$$\mathrm{A} \overset{S_{\mathrm{M}}}{\mapsto} \mathrm{B} \overset{S_{\mathrm{N}}}{\mapsto} \mathrm{C} \overset{S_{\mathrm{P}}}{\mapsto} \mathrm{D} \overset{S_{\mathrm{Q}}}{\mapsto} \mathrm{E}$$

or : $S_{\mathrm{N}} \circ S_{\mathrm{M}} = t_{2\overrightarrow{\mathrm{MN}}}$

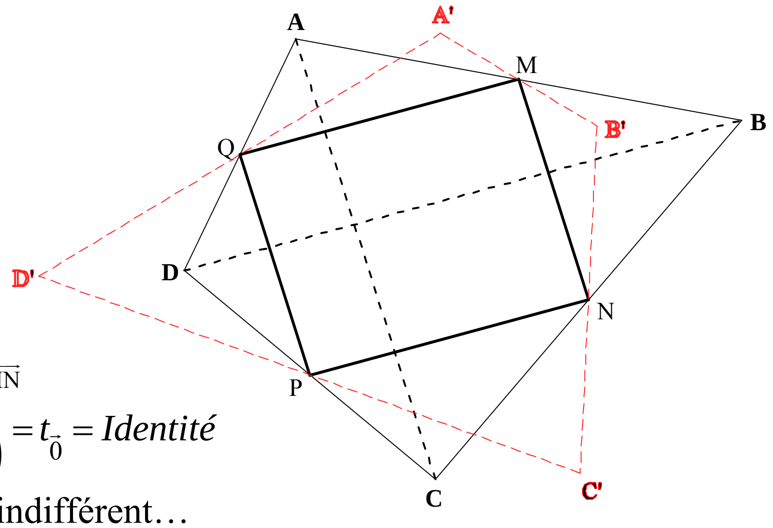
et : $S_{\mathrm{Q}} \circ S_{\mathrm{P}} = t_{2\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}$

d'où :

$$S_{\mathrm{Q}} \circ S_{\mathrm{P}} \circ S_{\mathrm{N}} \circ S_{\mathrm{M}} = t_{2\overrightarrow{\mathrm{PQ}}} \circ t_{2\overrightarrow{\mathrm{MN}}}$$

$$S_{\mathrm{Q}} \circ S_{\mathrm{P}} \circ S_{\mathrm{N}} \circ S_{\mathrm{M}} = t_{2\left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right)} = t_{\vec{0}} = \textit{Identité}$$

et donc E = A qui est bien indifférent…



❋❋❋ Prolongement ❋❋❋

On connaît les milieux des côtés d'un pentagone. Retrouver, dans la mesure du possible, ses sommets…

***Indication de solution** :*

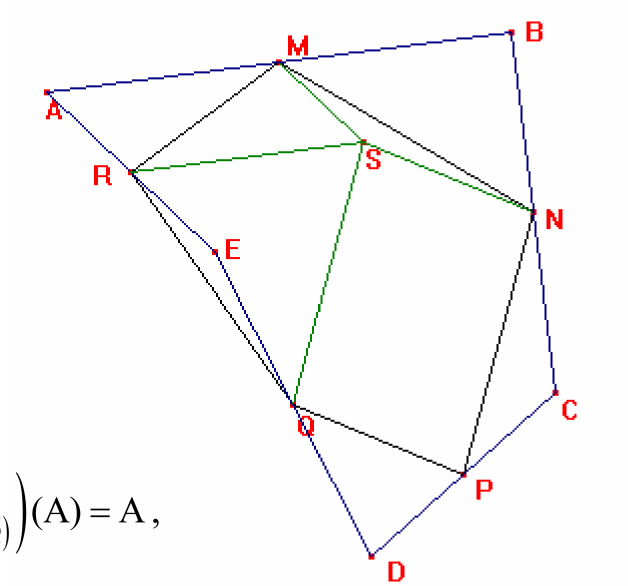
Soient M, N, P, Q, R les milieux donnés et procédons comme à l'exercice précédent à partir d'un sommet quelconque A…

On a : $\mathrm{A} \overset{S_{\mathrm{M}}}{\mapsto} \mathrm{B} \overset{S_{\mathrm{N}}}{\mapsto} \mathrm{C} \overset{S_{\mathrm{P}}}{\mapsto} \mathrm{D} \overset{S_{\mathrm{Q}}}{\mapsto} \mathrm{E} \overset{S_{\mathrm{R}}}{\mapsto} \mathrm{F}$

et : $S_{\mathrm{Q}} \circ S_{\mathrm{P}} \circ S_{\mathrm{N}} \circ S_{\mathrm{M}} = t_{2\overrightarrow{\mathrm{PQ}}} \circ t_{2\overrightarrow{\mathrm{MN}}} = t_{2\left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right)}$

d'où : $S_{\mathrm{R}} \circ S_{\mathrm{Q}} \circ S_{\mathrm{P}} \circ S_{\mathrm{N}} \circ S_{\mathrm{M}} = S_{\mathrm{R}} \circ t_{2\left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right)}$

donc F = A si et seulement si $\left(S_{\mathrm{R}} \circ t_{2\left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right)}\right)(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$,



c'est à dire si et seulement si $\left(t_{2\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}\right)}\right)(A) = S_R(A)$,

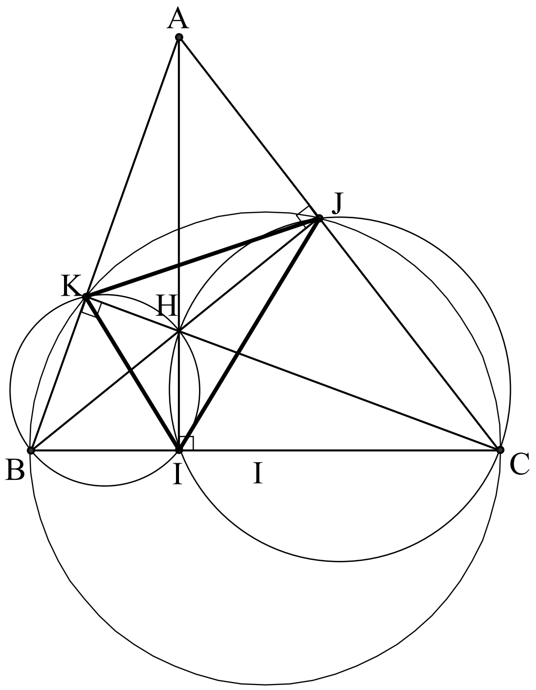
car $S_R \circ S_R = identité$ …

Comme $S_R(A) = E$, cela signifie que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AR} = 2\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}\right)$ ou encore que : $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}$, ce qui définit A de manière unique…

Remarque : en introduisant le point S tel que NPQS soit un parallélogramme (c'est à dire tel que S soit le milieu de [BE]), on a $S_S \circ S_Q \circ S_P \circ S_N = t_{\vec{0}} = Identité$, d'où $S_Q \circ S_P \circ S_N = S_S$ et on est ramené au problème précédent…

❈❈❈ 5 ❈❈❈

Soit H le point d'intersection des hauteurs d'un triangle ABC et I, J et K les projections orthogonales respectives de A, B et C sur les droites (BC), (AC) et (AB). Quelle position particulière occupe H dans le triangle IJK (dit ***triangle orthique***) ?



Remarque et indication :

La forme ouverte de la question oblige l'élève à des initiatives, comme de faire plusieurs cas de figures soignées et, de toute façon, l'oblige à formuler une conjecture. Un travail en groupe serait donc particulièrement indiqué dans ce cas et/ou une simulation avec un logiciel tel que CABRI-géomètre. Le problème peut être proposé dès la classe de Seconde. Le résultat présente un certain intérêt puisqu'il relie par une propriété remarquable des droites particulières d'un triangle.

(cf. "hauteurs et bissectrices" dans Probématique 1)

PROBLÉMATIQUE 4 :

MESURE DES GRANDEURS PRÉCISION, APPROXIMATION, INCERTITUDE

Situations	Démarches	Contenus
Approximation d'une fonction par une autre.	Factoriser, décomposer. Approcher, étudier des limites.	Courbes asymptotes.
Approximation par une fonction polynôme.	Recherche graphique et analytique.	Développement limité. Approximation affine.
Approximation d'une longueur, d'une aire.	Encadrement d'un réel par des suites.	Suites, vitesse de convergence
Approximation de la somme d'une série par des intégrales.	Passage du discret au continu.	Intégrale de Riemann
Approximation statistique d'une aire.	Méthode de Monte Carlo.	Probabilité uniforme sur une surface.
Détermination d'intervalle de confiance.	Remplacer une var. stat. par une autre. Simuler	Convergence en loi. Th. central limite.

Exemple

❉❉❉ **2** ❉❉❉

Mouloud a été élu délégué avec 66,7 % des voix des 27 élèves de sa classe.

1° Sur la feuille de compte rendu, Mouloud a écrit par erreur 77,6 %. Sans même savoir le nombre de voix obtenu par Mouloud, son professeur lui fait remarquer qu'il s'est trompé. Comment a-t-il fait pour s'en apercevoir ?

2° Combien de voix Mouloud a-t-il obtenu, sachant que son score a été arrondi à 0,1 près ?

Indication de solution :

Soit x le nombre de voix obtenues par Mouloud : $x \in \mathbf{N}$ et $0 \leq x \leq 27$.

1° $\dfrac{77{,}6 \times 27}{100} = 20{,}952$; or avec 21 voix le pourcentage, à 10^{-1} près, serait de $\dfrac{21}{27} \times 100 \approx 77{,}8$ % et avec 20 voix il serait de $\dfrac{20}{27} \times 100 \approx 74{,}1$ %.

Autre approche proposée (qui convainc souvent davantage les élèves car 77,8 c'est tout de même proche de 77,6 !) :

En supposant que 77,6 % est une **valeur arrondie à 10^{-1} près** :

$77{,}55 \leq \dfrac{x}{27} \times 100 < 77{,}65$ d'où $20{,}9385 \leq x < 20{,}9655$ et comme $x \in \mathbf{N}$, il n'y a pas de solution !

En supposant que 77,6 % est une **valeur tronquée à 10^{-1} près** :

$77{,}6 \leq \dfrac{x}{27} \times 100 < 77{,}7$ d'où $20{,}9512 \leq x < 20{,}979$ et comme $x \in \mathbf{N}$, il n'y a pas de solution !

2° $\dfrac{66{,}7 \times 27}{100} = 18{,}009\ldots$

or avec 18 voix le pourcentage est bien de $\dfrac{18}{27} \times 100 \approx 66{,}7$ % à 10^{-1} près.

On peut alors proposer de vérifier qu'il y a bien l'entier 18 dans l'encadrement traduisant l'énoncé, à savoir :

$66{,}65 \leq \dfrac{x}{27} \times 100 < 66{,}75$ c'est à dire : $17{,}9955 \leq x < 18{,}0225$ et comme $x \in \mathbf{N}$, $\boldsymbol{x = 18}$!

❉❉❉ 3 ❉❉❉

Pour tout renseignement, le chef cuistot d'un Lycée de 1 650 élèves ne connait que le pourcentage des élèves demi-pensionnaires. **Quel nombre de repas doit-il prévoir sachant que ce pourcentage est égal à 55 % ?**

On étudiera deux cas suivant que ce pourcentage est une valeur tronquée à l'unité ou une valeur arrondie à l'unité… et bien sûr, on donnera les résultats sous forme d'une "fourchette" de nombres entiers...!

***Indication de solution** :*

Soit R le nombre de repas à prévoir (c'est à dire le nombre de demi-pensionnaires). $R \in \mathbf{N}$.

1° Si 55 est une valeur tronquée à l'unité :
$0{,}55 \times 1650 \leq R < 0{,}56 \times 1650$ c'est à dire : $907{,}5 \leq R < 924$.
Le chef cuistôt devra donc prévoir entre 908 et 923 repas.

2° Si 55 est une valeur arrondie à l'unité :
$0{,}545 \times 1650 \leq R < 0{,}555 \times 1650$ c'est à dire : $899{,}25 \leq R < 915{,}75$.
Le chef cuistôt devra donc prévoir entre 900 et 915 repas.

Dans le doute, il lui faut donc prévoir **entre 900 et 923 repas** ce qui représente pratiquement 3 tables de 8 personnes d'écart !

❉❉❉ 4 ❉❉❉

Soient a et b deux nombres tels que $b < a < 0$.

1° À quel intervalle appartient $\frac{a}{b}$?°En déduire, en le justifiant, dans quel intervalle se trouvent $A = \frac{-5a}{4b}$ et $B = \frac{b-3a}{2b}$. Est-il possible que $A = B$?

2° Qu'en est-il réellement ? Pour répondre à cette question, résoudre l'équation $A = B$ d'inconnue $x = \frac{a}{b}$.

3° Donner une interprétation graphiquement des réponses précédentes.

Exercice qui suscite à chaque fois pas mal d'intérêt, notamment grâce à l'interprétation graphique demandée en 3°.

La méthode consistant à étudier le rapport B/A donne une réponse quasi immédiate ici puisque l'on obtient –2b/5a = –1/5, d'où l'on déduit a/b = 2, ce qui est impossible d'après la question 1… mais c'est volontairement que l'on a posé cette question sous cette forme pour amener les élèves à l'interprétation de la question 3°… (cf. ***problématique 7 : changement de registres et de cadres****).*

❈❈❈ 5 ❈❈❈

Dans un repère du plan, on considère les droites d_1 et d_2 d'équations respectives : $y = \dfrac{x}{a}$ et $y = -x + b$ où $-0{,}6 < a < -0{,}5$ et $-1{,}5 < b < -1{,}4$.

Le but de cet exercice est d'encadrer au mieux les coordonnées du point d'intersection des droites d_1 et d_2.

1° Calculer, en fonction de a et b, les coordonnées du point d'intersection I de d_1 et d_2.

2° En déduire un encadrement de l'abscisse ainsi que de l'ordonnée du point I.

3° Le point I peut-il avoir pour coordonnées $(2\,;\,-3)$? $(1{,}75\,;\,-3)$? et $(1{,}75\,;\,-3{,}2)$?
Donner une interprétation graphique de ces résultats.

❈❈❈ 13 ❈❈❈

Divers procédés “coutumiers” ont été utilisés au cours du temps pour évaluer une approximation de l'aire d'un quadrilatère à partir des longueurs des côtés, en effet l'aire n'est pas calculable si ces longueurs sont les seuls éléments connus.

Un des précédés est le suivant : *on fait le produit des moyennes des longueurs des côtés opposés.*

Ce procédé semble avoir été largement utilisé, il est déjà mentionné dans le Papyrus de Rhind qui date de 1650 avant Jésus-Christ, et il encore utilisé de nos jours par les paysans du Nordeste brésilien[1].

Quels sont les quadrilatères pour lesquels cette formule est exacte ? Que peut-on dire de l'aire des autres quadrilatères ?

---

[1] On peut lire sur ce sujet :
Mathématiques paysannes, de Guida de Abreu, dans le numéro spécial “Nombres” de La Recherche n°278 de juillet-août 1995.
Le problème n°52 du petit vert, de la Régionale APMEP de Lorraine.
La conférence de René Lozi aux Journées Nationales de l'APMEP à Nice en 2000, Bulletin Vert n°437.

PROBLÉMATIQUE 5 :

TRAITEMENT ET REPRÉSENTATION DE DONNÉES STATISTIQUES ET DE L'ALÉATOIRE

Objectifs

- permettre de comprendre la société dans laquelle nous vivons
- faire étudier des situations de la vie courante
- faire une place au raisonnement non déterministe
- fournir des outils pour résoudre d'autres classes de problèmes

Situations	Démarches	Contenus
Réalisation d'une enquête. Représenter graphiquement des données. Déterminer un petit nombre de paramètres	Démarche statistique Chercher un compromis entre information et simplicité	Population, effectif, fréquence, f. cumulée Types de var. st. Représentations graphiques statistiques. Paramètres de position et de dispersion.
Pari sur la réalisation d'un événement. Dénombrement.	Optimiser les chances de gain. Raisonner par disjonction des cas.	Probabilité (a priori, a posteriori) Langage des ensembles, combinatoire.
Situation séquentielle de jeu. Situation de contingence. Etude d'échantillons.	Changer de point de vue. Observation, sens critique.	Probabilité conditionnelle, f. de Bayes Couple de var.alé., régression Statistique inférentielle.

Exemple

Une maladie est apparue dans la population d'un pays. Une étude statistique a montré qu'elle touche actuellement un individu sur 10 000. D'autre part, on a mis au point un test de dépistage de cette maladie, pour lequel une étude statistique a montré que :

- sur un malade, la probabilité que le test soit positif est de 98%
- sur une personne saine, la probabilité que le test soit négatif est de 99%.

Étudier la qualité de ce test.

Notations

Population Ω : le cheptel bovin du pays
Événement M : l'animal est malade
Événement T : le test de l'animal est positif

Expérience aléatoire

Choix au hasard d'un animal dans le cheptel du pays.
(d'où : probabilité p uniforme sur Ω)

Données

$p(\mathrm{M}) = 0,0001$; $p(\mathrm{T}/\mathrm{M}) = 0,98$; $p(\overline{\mathrm{T}}/\overline{\mathrm{M}}) = 0,99$

On en déduit : $p(\overline{\mathrm{M}}) = 0,9999$; $p(\overline{\mathrm{T}}/\mathrm{M}) = 0,02$; $p(\mathrm{T}/\overline{\mathrm{M}}) = 0,01$

D'où :
$$\begin{aligned} p(\mathrm{T}) &= p(\mathrm{T}/\mathrm{M})\times p(\mathrm{M}) + p(\mathrm{T}/\overline{\mathrm{M}})\times \mathrm{p}(\overline{\mathrm{M}}) \\ &= 0,98\times 0,0001 + 0,01\times 0,9999 \\ &= 0,019799 \end{aligned}$$

$$p(\overline{\mathrm{M}}/\mathrm{T}) = \frac{p(\mathrm{T}/\overline{\mathrm{M}})\times p(\overline{\mathrm{M}})}{p(\mathrm{T})} = \frac{0,01\times 0,9999}{0,019799} = 0,505$$

$$p(\mathrm{M}/\overline{\mathrm{T}}) = \frac{p(\overline{\mathrm{T}}/\mathrm{M})\times \mathrm{p}(\mathrm{M})}{p(\mathrm{T})} = \frac{0,02\times 0,0001}{0,019799} = 0,0001$$

1ère

❋❋❋ 17 : une introduction de la variance ❋❋❋

On a fait n observations $x_1, x_2, \cdots, x_n$ d'un phénomène quantitatif aléatoire X avec les fréquences respectives f_i.

Déterminer le nombre $\boldsymbol{a}$ tel que : $\sum_{i=1}^{i=n} f_i(x_i - a)^2$ soit minimale.

*Ce minimum sera appelé **variance** en Terminale.*

*On peut rappeler que la moyenne **m** des valeurs* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *affectées des coefficients respectifs* f_i *est définie par* $\mathbf{m} = \sum_{i=1}^{i=n} f_i x_i = \dfrac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{i=n} n_i x_i$ *où* n_i *est l'effectif coorespondant à l'observation* x_i *et* $\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{i=n} n_i$.

Remarque :** en développant la somme donnée et regroupant les termes dont **a** est facteur, on obtient un binôme du second degré en **a** dont l'extremum est un minimum pour **a = moyenne des valeurs x_i . *Ce minimum est égal à la variance de X.*

$$\sum_{i=1}^{i=n} f_i(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{i=n} f_i x_i^2 - 2a\sum_{i=1}^{i=n} f_i x_i + a^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{i=n} f_i}_{=1}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} f_i(x_i - a)^2 = a^2 - 2a \times m + \sum_{i=1}^{i=n} f_i x_i^2 \hookrightarrow \Delta' = m^2 - \sum_{i=1}^{i=n} f_i x_i^2 < 0$$

En effet $\Delta' = -\sum_{i=1}^{1=n} f_i \left(x_i - m\right)^2 = -\sum_{i=1}^{1=n} f_i \left(x_i - \sum_{i=1}^{i=n} f_i x_i\right)^2$

Ce polynôme du second degré n'a pas de racine et comme le coefficient de a^2 *est positif, il admet un minimum pour* $a = m = \sum_{i=1}^{i=n} f_i x_i \ldots$

Si X est une variable aléatoire et les coefficients f_i *les probabilités affectées aux nombres* x_i *alors* $E[(X - \boldsymbol{a})^2]$ *est minimum lorsque* $\boldsymbol{a} = E[X]$.

Dans ce cas : $\Delta' = -[\mathrm{E}(\mathrm{X})]^2 + \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) = -\mathrm{E}[(\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X}))^2] = -\mathrm{V}(\mathrm{X}) < 0\ldots$

Cet exercice permet de disposer d'une conception de la variance qui fait intervenir l'optimisation d'une distance euclidienne. Cette conception munit la variance d'une signification dynamique et "économique", ce que n'offre pas la définition classique qui peut sembler parachutée.

APMEP

Groupe "Problématiques Lycée"

Pour un enseignement problématisé des Mathématiques au Lycée

Tome 2

En référence privilégiée à des objectifs méthodologiques

Brochure n° 154 - N° ISBN : 2-912846-30-7

APMEP

PROBLÉMATIQUE 6 :

TECHNIQUES ALGORITHMIQUES

Algorithme = ensemble de règles opératoires dont l'application permet de résoudre un problème en un nombre fini d'opérations (↳ pas de contenus spécifiques).

La question du sens se pose : la pensée algorithmique libère l'esprit mais risque d'enfermer.

Situations	Démarches
Reprise de situations anciennes du point de vue algorithmique Recherche opérationnelle (exemple : méthode PERT[2])	Prendre conscience de l'aspect algorithmique de certaines actions. Appliquer un algorithme donné.
Écrire les étapes d'un algorithme : – racine(s) d'une équ. polynom. – racine carrée (Héron) – algorithme itératif – algorithme récursif (suite réc.)	Décomposer une suite d'opérations en ses pas successifs, écrire un programme informatique. Distinguer itération et récursivité.

Exemples

❋❋❋ **1** ❋❋❋

Expliquer pourquoi les calculs suivants peuvent être faits rapidement de tête :

1) 37×43 ; 75×85
2) $65^2 = 6\times7\times100 + 25 = 4225$
3) $2^7\times5^3$; $12^3\times5^6$; $15^4\times16$

[2] Project Evaluation and Review Technique !

Remarque et indication :

Ces petits rappels semblent utiles afin de donner un sens aux révisions de calculs algébriques. Mais également, souligner, en classe de Seconde, l'importance du calcul mental pour exercer un contrôle sur les calculs effectués la plupart du temps à la calculette, nous semble primordial.

La première propriété en jeu est l'application de l'identité : $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ [1600 – 9 = 1591 ; 6400 – 25 = 6375].

Le seconde se déduit à la fois de la numération décimale et de l'application de l'identité : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a(a+2b)+b^2$
[$65^2 = 60^2 + 2\times60\times5 + 25 = 60\times(60 + 10) + 25$…].

La troisième met en jeu l'identité $a^n\times b^n=(ab)^n$*, en particulier* $2^n\times5^n=10^n$*, ainsi que l'identité* $(a^n)^p=a^{np}$
[$2^2\times10^3$… ; $3^3\times4^3\times5^6 = 27\times10^6$; $3^4\times5^4\times2^4 = 9^2\times10^4$; $7^2\times8^2\times5^5 = 49\times2\times10^5$…].

3$^{\text{ème}}$ / 2$^{\text{nde}}$

❉❉❉ **2** ❉❉❉

Une tasse est pleine de café noir. J'en bois tout d'abord une gorgée que j'évalue à 1/6. Je complète alors ma tasse avec du lait et je mélange soigneusement. Je bois ensuite 2/3 de ce mélange et je complète une nouvelle fois avec du lait. Enfin, je bois le tout. Je me demande si ainsi j'ai bu plus de café que de lait.

Remarque et indication :

Plutôt qu'une tâche mobilisant directement les savoir-faire des élèves en matière de fractions, ce problème a quelques chances de les mobiliser par son ouverture et son aspect ludique. Une petite mathématisation est nécessaire mais l'essentiel est de manipuler correctement des opérations sur les fractions d'entiers.
On trouvera sans difficulté que ***je bois en tout 1 tasse et 5/6 de tasse*** *soit* ***1 tasse de café*** *et* ***5/6 de tasse de lait****.*

Et "pour le régal", voici la façon dont Jean-Pierre Kahane nous a dit avoir abordé ce petit problème :

« L'important ici est de mémoriser l'énoncé et d'extraire ce qui est relatif à la question posée.

Qu'ai-je bu comme café ? ✎ Une tasse pleine.

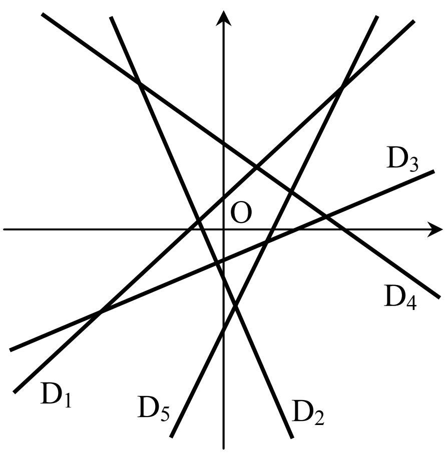
Comme lait ? ✎ Ce que j'ai ajouté, sucessivement 1/6 et 2/3 de la tasse donc moins d'une tasse (1/6 < 1/3 !)

Donc j'ai bu plus de café !

*Qu'est-ce qu'on peut (en fait **doit**) **oublier** ? Qu'on mélange soigneusement.*

*Qu'est-ce qui est **inutile** : l'algorithme d'addition des fractions. »*

❉ ❉ ❉ 7 ❉ ❉ ❉



Les droites représentées ci-contre, dans le plan repéré, admettent des équations de la forme :

$$y = a_i x + b_i \text{ où } i \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$$

Utiliser à vue les représentations graphiques pour ranger les nombres réels a_i par ordre croissant.

Faire de même ensuite pour les nombres réels b_i.

Remarque et indication :
Les objectifs de ce problème sont :

***1°** décoder une propriété graphique en passant du **registre graphique** au **registre algébrique**,*

***2°** manifester la compréhension de l'ordre sur les réels,*

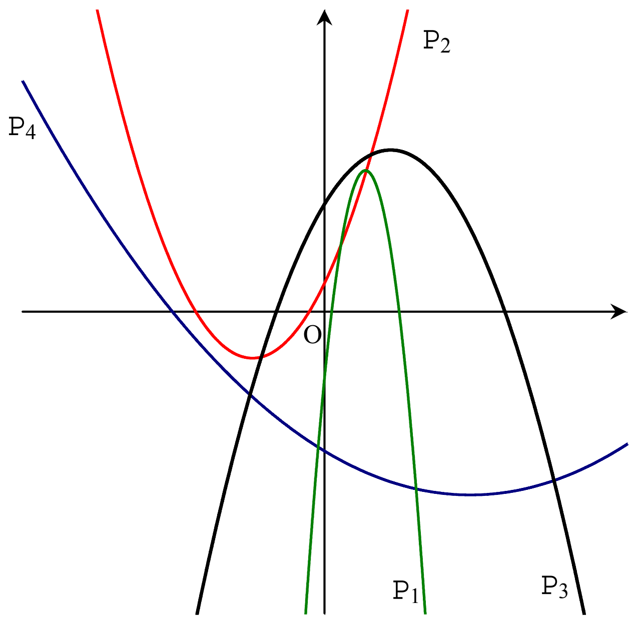
***3°** réviser la signification des paramètres de la représentation algébrique d'une droite dans un repère cartésien.*

De ce fait, le problème peut être proposé en Collège avant la classe de Seconde. Il implique une mise à distance de l'algorithme de représentation graphique d'une fonction affine.

❉❉❉ 8 ❉❉❉

Les paraboles représentées ci-dessous, dans le plan repéré, admettent des équations de la forme $y = a_i x^2 + b_i x + c_i$, avec a_i non nul, pour $i \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.
Utiliser à vue leur représentation graphique pour répondre aux questions suivantes :

1) Ranger dans l'ordre croissant les c_i, puis les $q_i = -\dfrac{b_i}{a_i}$, puis les a_i.
2) Quels sont les signes des b_i ?



Remarque et indication :

Les objectifs sont les mêmes qu'à l'exercice 7. Les questions trouveraient une place intéressante en Première pour : valider la ***compréhension de la représentation graphique de la parabole****, en particulier le* ***rôle des paramètres de son équation****, de l'***algorithme*** $a_i\left[\left(x+\dfrac{b_i}{2a_i}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a_i^2}\right]$ et/ou de la dérivée du trinôme du second degré.*

Réponses : $c_4 < c_1 < c_2 < c_3$ *(intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées) ;*

$q_2 < q_1 < q_3 < q_4$ *(double de l'abscisse du sommet de la parabole) ;*

$a_1 < a_3 < a_4 < a_2$ *(a > 0 pour P₂ et P₄ , a < 0 pour P₁ et P₃ + "ouverture" de la parabole) ;*

$b_1 > 0$; $b_2 > 0$; $b_3 > 0$; $b_4 < 0$ (b_i du signe opposé de $a_i \times q_i$).

À titre indicatif : P$_1$ *a pour équation* $y = -15x^2 + 20x - 2$

P$_2$ *a pour équation* $y = 1{,}75x^2 + 4{,}2x + 1$

P$_3$ *a pour équation* $y = -1{,}5x^2 + 3{,}25x + 3{,}6$

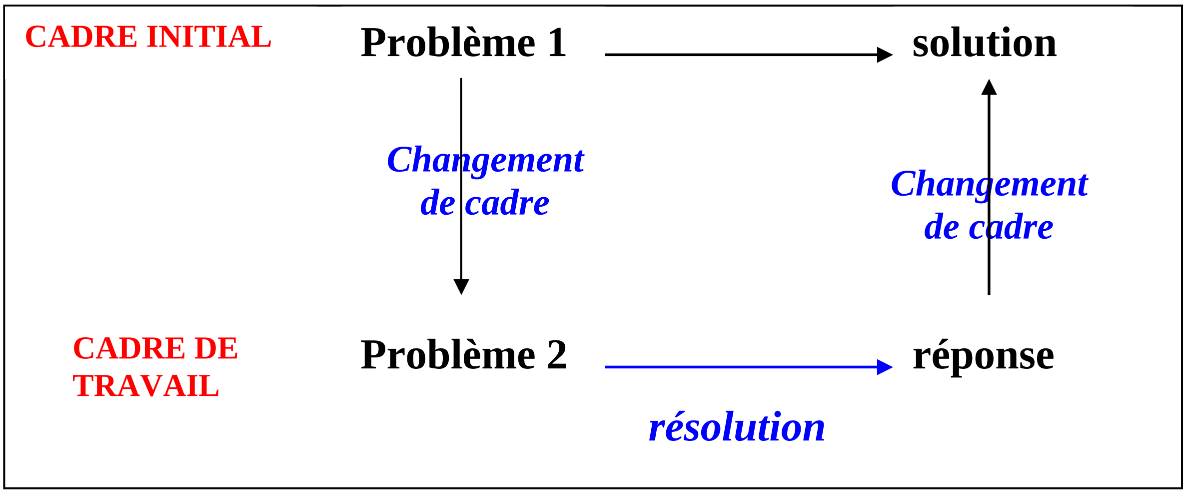
P$_4$ *a pour équation* $y = 0{,}25x^2 - 1{,}2x - 4{,}6$

PROBLÉMATIQUE 7 :
CHANGEMENTS DE CADRES ET DE REGISTRES

Cadre (Douady) :
- ☞ ensemble de concepts
- ☞ relations entre ces concepts
- ☞ formulations
- ☞ symbolisme

Exemples :
- ❈ cadre de la géométrie affine
- ❈ cadre algébrique
- ❈ cadre vectoriel
- ❈ cadre des probabilités

Type de démarche



Registre sémiotique de représentation (Duval)

Système de signes permettant :

- le traitement (interne)
- la conversion (externe)

Exemples :

- registre de la langue maternelle
- registre du langage symbolique
- registre des tableaux à double entrée
- registre figural (géométrie)
- registre des graphiques

Exemples

Résolution d'équations par les Arabes orientaux

Résoudre dans **C** *l'équation :* $|z-2|=|z+i|$

Situations	Démarches	Contenus
Lecture et discussion d'un énoncé. "Word problem"… Changement de cadre piloté par le prof.	Extraire l'information pertinente. Passer au registre symbolique. "Traduction" d'un énoncé en un autre.	Tous contenus possibles

↳ Cf situations didactiques développées :

Introduction du nombre dérivé (Première)

Consigne initiale :

Représenter graphiquement la fonction : $x \mapsto f(x) = -\dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}$

dans une fenêtre orthonormale de la calculatrice, centrée sur le point A *de la courbe de coordonnées (2 ; 1,5) et de largeur 6.*

1) Étude qualitative

   Qu'observez-vous en rétrécissant la fenêtre ?

2) Étude quantitative

   Déterminer une équation de la "droite" affichée sur l'écran.

3) Étude mathématique

   Soit M *le point de la courbe d'abscisse 2 + h (avec h "petit"). Déterminer le coefficient directeur de la droite (AM).*

4) Étude générale

   Même étude en prenant x_0 *comme abscisse du point* A.

➯ Recherche du coefficient directeur d'une droite définie par deux points : on se situe dans le cadre de la géométrie analytique, qui fait intervenir, en plus du registre graphique, le registre numérique (coordonnées de points), par une succession de va-et-vient, puis le registre symbolique (formule $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ permettant le calcul du coefficient directeur). On a ici le schéma suivant :

Registres :	***graphique***	$\leftrightarrow$	***numérique*** ($\mathbf{R}^2$)	$\rightarrow$	***symbolique+ numérique***
Démarches :	repérage des points à utiliser		Détermination des coordonnées		détermination du coefficient directeur

➯ La progression de la séquence peut donc être schématisée de la façon suivante :

Cadres :	**analyse**	→	**analytique**	→	**analyse**	→	**analytique**
Registres :	***symbolique***		***graphique numérique symbolique***		***symbolique***		***symbolique graphique***
Démarches :			Observation de la courbe, calcul des coef. dir.		recherche d'une limite		tangente à la courbe

On voit que ce qui permet aux élèves de progresser dans leur démarche, c'est bien sûr la possibilité d'effectuer un travail véritable dans un cadre et un registre donnés, mais aussi:

1° l'existence d'un **cadre** et d'un **registre** d'appui (ici: le cadre de la géométrie analytique, et le registre graphique) qui permettent, non seulement –et ce n'est pas négligeable– d'établir un lien entre différents aspects du concept visé (ici: nombre dérivé et tangente), mais aussi de faciliter les conjectures, de donner du sens aux actions effectuées et de contrôler celles-ci.

2° l'insuffisance du travail dans un seul cadre et dans un seul registre, car la démarche induit des questions qui ne pouvant être résolues que par le recours à un autre cadre (ici: l'analyse) et/ou à un autre registre (ici: le registre symbolique). **En fait c'est, dans une large mesure, cette succession de changements et ces va-et-vient qui constituent l'élément moteur de la démarche, et lui permettent d'aboutir.**

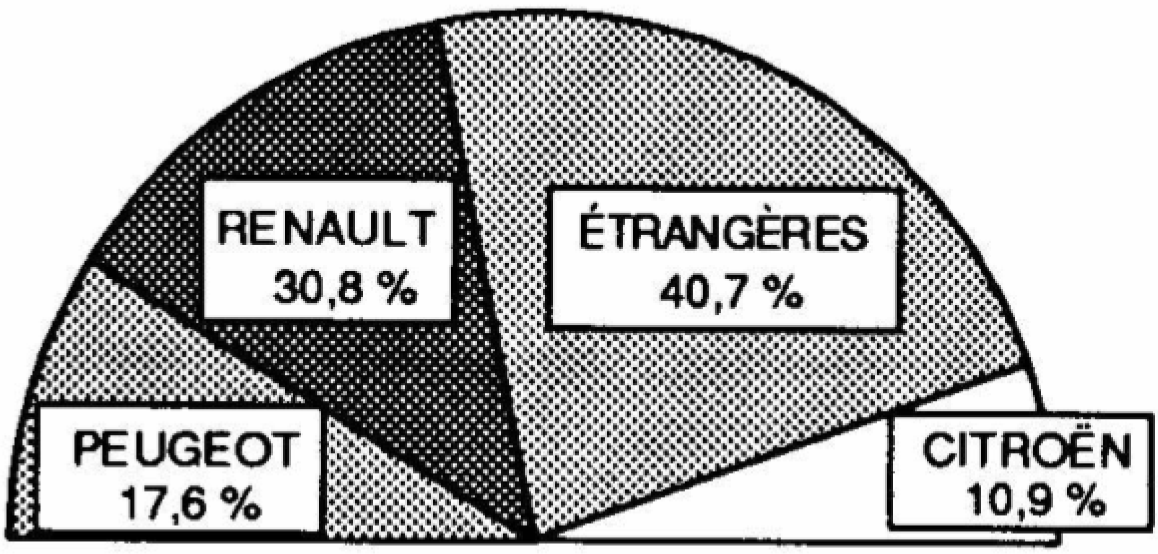
PROBLÉMATIQUE 8 :

RECUEIL, TRAITEMENT, COMMUNICATION DE L'INFORMATION

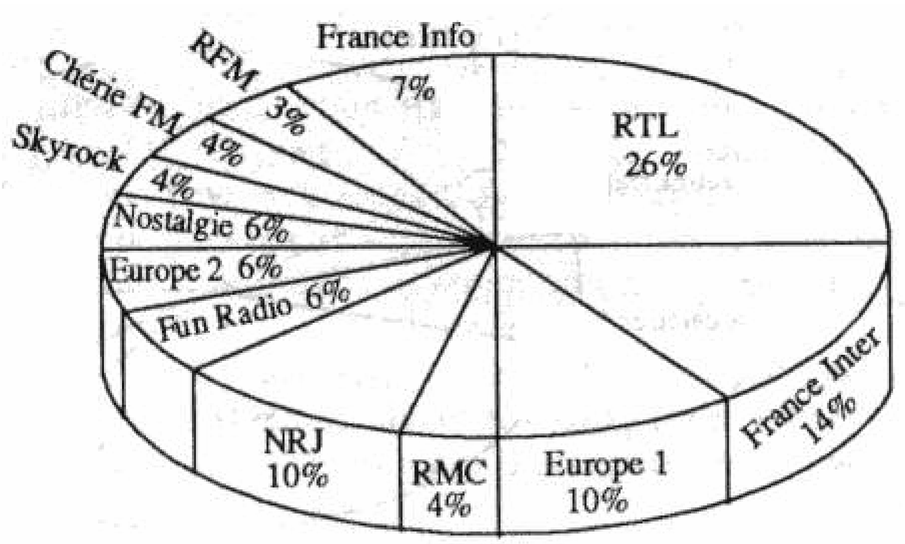
N.B. : Les contenus sont ici essentiellement d'ordre méthodologique.

Situations	Démarches
Recueil de documents issus des médias (presse, Internet…)	Poser un regard critique sur l'information Apprendre à consulter une base de données (arborescence)
Mise en place d'une banque de données, création d'une mémoire (définitions, théorèmes, conjectures, problèmes)	Identifier des données par des mots-clés
Conjecturer, valider, étendre des résultats à l'aide des TICE	Utiliser des logiciels spécifiques (tableur, calcul formel…)

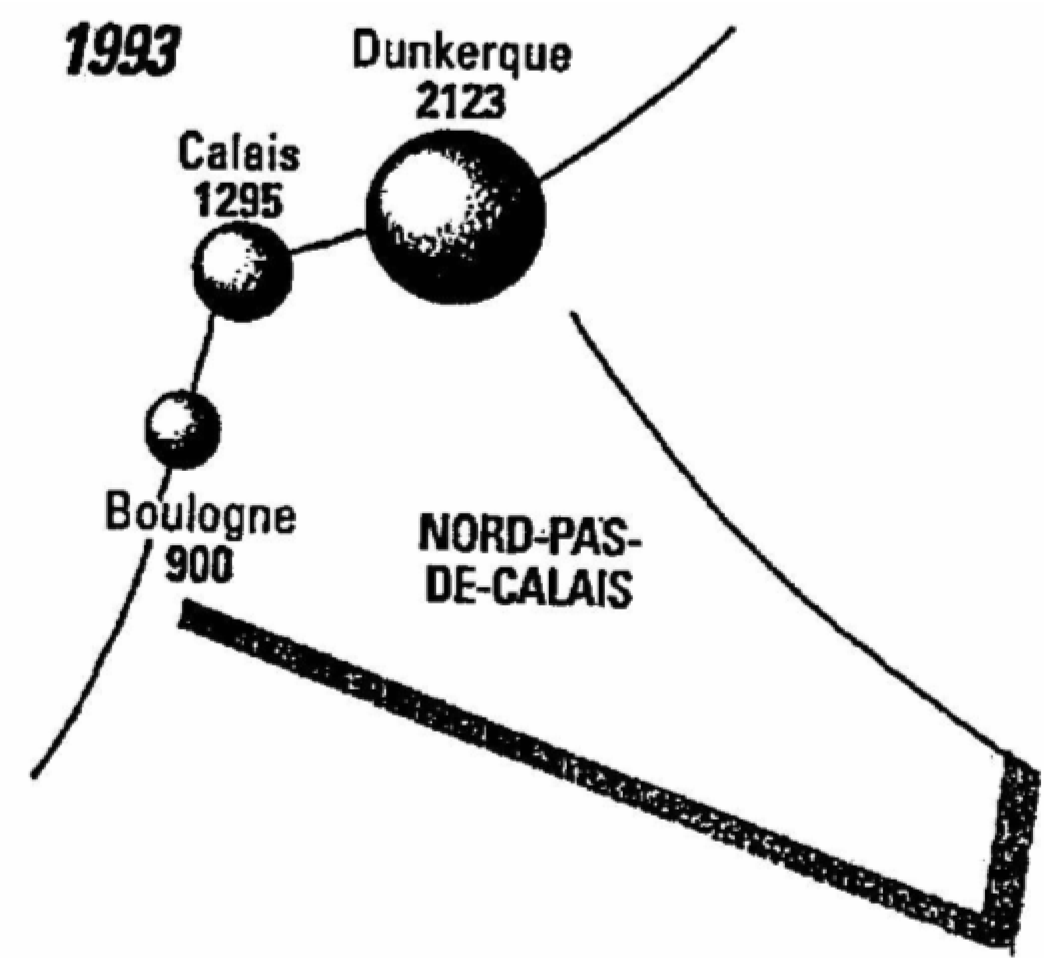
Exemples



Immatriculations d'automobiles en France en septembre 1989



Taux d'audience des radios française de sept. 1995 à juin 1996, du lundi au vendredi de 5 h à 24 h (enquête Médiamétrie)



Effectifs des trois sites de l'Université du Littoral en 1993
(source : Université du Littoral)

PROBLÉMATIQUE 9 :

CONSTRUCTION (OU CHOIX OPTIMAL) DE MODÈLES ET D'OUTILS

Étude mathématique de situations extra-mathématiques.

Caractère relatif et local des choix.

Objectifs spécifiques

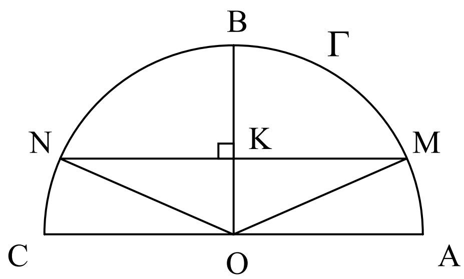
- ❋ développer l'esprit scientifique
- ❋ *faire expliciter les critères de choix
- ❋ faire prendre conscience de la contingence de la réponse
- ❋ repérer ce qui peut être réinvesti ailleurs

Situations	Démarches	Contenus
Trouver des majorants (ou minorants) pour une expression ou une fonction. Encadrer une fonction sur un intervalle.	Rechercher des stratégies efficaces. Transférer la connaissance d'un nombre à celle d'un autre.	Majoration (minoration). Lignes de niveau. Extremums. Continuité d'une fonction.
Intérêts composés.	Passage du discret au continu.	Dérivée, équation différentielle.
Etude d'une situation d'ordre partiel.	Représentation graphique (arbre).	Relation d'ordre.
Recherche d'un chemin critique (graphe)	Utiliser un algorithme d'optimisation.	Théorie des graphes.

Exemples

Sur la figure ci-contre :

- les points M et N sont sur le demi-cercle Γ de centre O et de rayon 10 cm.
- le point K appartient au rayon [OB] perpendiculaire en O au diamètre [AC].



Il s'agit de déterminer la position du point K pour que le triangle NOM ait la plus grande aire possible.

Indications :

1° Calculer **la valeur exacte** de l'aire du triangle NOM pour trois valeurs différentes de OK de votre choix avant d'en donner la valeur approchée au mm² le plus proche.

2° Exprimer l'aire du triangle NOM ***en fonction*** de OK (par exemple, vous poserez OK = x, et vous préciserez les valeurs possibles que peut prendre x) ; dresser un tableau de valeurs de la fonction $\mathcal{A}$ ainsi définie tous les 0,25 cm… (mais avec une calculatrice, ce n'est pas si terrible !) ; représenter graphiquement la fonction $\mathcal{A}$ point par point sur du papier millimétré (unités: le cm en abscisse et 1 mm en ordonnée pour représenter 1 cm²).

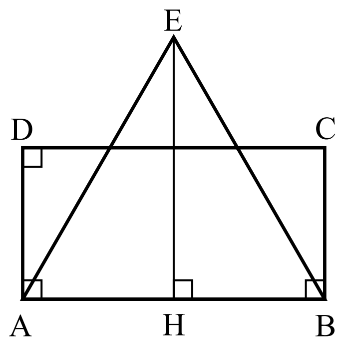
3° Lire sur le graphique précédent une valeur approchée de OK pour laquelle l'aire du triangle NOM semble maximum. Construire le triangle NOM pour la valeur qui vient d'être lue. Quelle semble être la nature de ce triangle ?

4° Calculer la valeur exacte de OK pour que le triangle NOM soit bien du type conjecturé à la question **3°**. Si l'on note α cette valeur, que vaut $\mathcal{A}(\alpha)$?

HB : Trouver une démonstration permettant d'affirmer que $\mathcal{A}(\alpha)$ est bien la plus grande aire possible pour le triangle NOM.

La figure ci-contre représente un rectangle ABCD et un triangle isocèle ABE ayant tous les deux 12 cm de périmètre.

Déterminer lequel de ces deux polygones a la plus grande aire suivant la valeur de AB.



PROBLÉMATIQUE 10 :

CONJECTURES, PREUVES, RÉFUTATIONS ET VALIDATIONS

Démonstration mathématique = preuve particulière, respectant des règles et une rhétorique codifiée.

Autres types de preuves : argumentation, ostension …

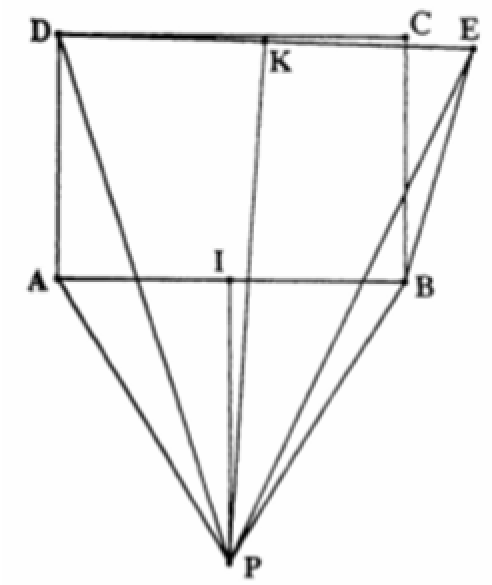
Fonctions de la preuve

- ❋ sociale (convaincre l'autre)
- ❋ psycho-cognitive (se convaincre)
- ❋ épistémologique (étendre la connaissance)

Situations	Démarches
Recherche d'une partie du plan astreinte à des conditions.	Tâtonnement, conjecture, essais, validations. Dialectique dessin / figure.
Figure de géométrie "trompeuse"	Décomposer un texte en ses éléments, repérer les connecteurs logiques et leur fonction.
Analyse d'une démonstration (correcte ou fausse).	Divers types de raisonnement. Rôle du contre-exemple.

Exemple

Northrop, E.P. *Fantaisies et paradoxes mathématiques*, traduit par J. Bodet.
Collection "Les heures scientifiques". Ed. Dunod 1956



Sur la figure ci-contre, on a construit :
- un rectangle ABCD ;
- le point E à l'extérieur de ABCD tel que BE = BC ;
- la droite (IP) médiatrice de [AB] ;
- la droite (KP) médiatrice de [DE].

Or, dans les triangles ADP et BEP on a :
- BE = AD par construction de E,
- PA = PB car P sur la médiatrice de [AB],
- PD = PE car P sur la médiatrice de [DE].

Les triangles ADP et BEP sont donc isométriques d'où : $\widehat{DAP} = \widehat{EBP}$.
Mais comme le triangle PAB est isocèle en P, on a également : $\widehat{PAB} = \widehat{PBA}$.
On a donc : $\widehat{DAP} - \widehat{PAB} = \widehat{EBP} - \widehat{PBA}$, autrement dit $\widehat{DAB} = \widehat{EBA}$ … !